Philosophie

Zum Problem der ultrafiniten Paradoxien

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen philosophischen Fakultät
der Universität Breslau
vorgelegt von

Edgar Hunger
Studienrefendar in Breslau.

Promotion: 18. Januar 1930.

Spezialdruckerei für Dissertationen Dr. Hermann Eschenhagen K.-G. Ohlau i. Schl.

Gedruckt mit Genehmigung
der hohen philosophischen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Breslau.

Referent: Herr Professor Dr. Hönigswald.

Rigorosum bestanden am 6. November 1929.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern

in Dankbarkeit!

Inhaltsübersicht.

	Seite
I. Die Paradoxien der Mengenlehre als philosophisches Problem	
Zur mathematischen Lage	1
„Erklärungsversuch" und „Lösungsversuch"	2
Finslers zirkelhafte Mengen	3
Der indirekte Beweis. Falsche und paradoxe Prämisse	5
Die Beziehung „richtig — falsch"	6
Invarianten	7
Die Paradoxie als philosophisches Problem	9
II. Zu den Grundlagenforschungen der Mathematik von Hilbert, Brouwer und Weyl	
Das Verhältnis von Mathematik und Logik	10
Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten	11
Die Unentscheidbarkeit	12
Die Unmöglichkeit mathematischer Paradoxien	18
III. Die Paradoxie der unendlichen Mengen	
Die Menge aller Ordnungszahlen	19
Der Begriff der sich selbst enthaltenden Menge	20
Objekte gleicher Struktur	23
Setzung und Produkt der Setzung	25
Der Standortswechsel	27
Das Problem des „alle" und Auflösung des Paradoxons	31
Schluß: Die nicht-mathematischen Mengen	37

I.

Die größte Erschütterung, die die Mathematik im Laufe ihrer Geschichte erfahren hat, war das Auftreten jener Paradoxien, die seit dem Ausbau der Cantor'schen Mengenlehre bekannt wurden. Sie bildeten ein bedeutsames Hindernis für die exakte Ausgestaltung der Mengenlehre und damit für eine einwandsfreie Begründung der Mathematik. Ja, mehr noch schienen sie die Fundamente der Mathematik aufs heftigste zu erschüttern. Daß in der Mathematik, diesem „Musterbeispiel von Exaktheit", wie sie Hilbert nennt, unlösbare Widersprüche vorkamen, war etwas bis dahin nicht Dagewesenes. Zwar hätte ein Teil der Paradoxien die Mathematik nicht weiter beunruhigt. Man sah ein, daß, „falls wir gewisse, neuerdings in der Mathematik hinzugefügte ... ihr eigentlich nicht angehörige Begriffsbildungen zulassen wollen ... Paradoxien, das heißt unerwartete, scheinbar widerspruchsvolle Ergebnisse"[1] zu erwarten seien. So schien die „Menge aller Dinge", auf die zwar Dedekind seinen Existenzbeweis für unendliche Systeme gegründet hatte, nicht weiter für die Mathematik gefährlich, da sie mathematisch nicht definierte Objekte enthielt und damit ihre Definition selbst nicht einwandsfrei schien.

Aber es traten auch scheinbar mathematisch definierte Objekte auf, die widerspruchsvoll waren. „Insbesondere war es ein von Zermelo und Russell gefundener Widerspruch, dessen Bekanntwerden in der mathematischen Welt von geradezu katastrophaler Wirkung war. Angesichts dieser Paradoxien gaben Dedekind und Frege ihren Standpunkt tatsächlich auf und räumten das Feld: Dedekind trug lange Zeit Bedenken, von seiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?" eine neue Auflage zuzulassen; und auch Frege hatte die Tendenz seines Buches: „Grundlagen der Mathematik" als verfehlt erkennen müssen, wie er in seinem Nachwort gesteht. Und gegen Cantors Lehre gar wurden von den verschiedensten Seiten die heftigsten Angriffe gerichtet. Die Gegenbewegung war so ungestüm, daß die allerüblichsten Be-

1) O. Hölder: Die mathematische Methode. S. 533.

griffe und die allersimpelsten Schlußweisen in der Mathematik bedroht wurden und ihre Anwendung verboten werden sollte."*

So schildert in einem Vortrag Hilbert treffend die Sachlage, wie sie sich damals darbot und wie sie sich im wesentlichen noch heute darbietet. Hessenberg folgert sehr richtig auf Grund dieses Tatbestandes „Es ist leicht einzusehen, daß hierdurch (durch die Paradoxien) die ganzen Ergebnisse der Mengenlehre mit einem großen Fragezeichen versehen werden. Denn wenn die elementarsten Voraussetzungen unbekannte Grenzen ihrer Zulässigkeit haben, gilt das Gleiche von allen darauf gestützten Folgerungen."[2] Zwar ist es gelungen, durch strenge Axiomatisierung der Mengenlehre die Paradoxien zu beseitigen. Insbesondere sind hier Zermelo, Russel, in neuester Zeit Paul Finsler u. a. erfolgreich vorangegangen. Auch sind zahlreiche Versuche, die Paradoxien zu lösen, aufgetreten. Doch kann man sagen, daß die Paradoxien bis heute nicht gelöst worden sind.

Diese Arbeit stellt den Versuch dar, die Paradoxie von Burali-Forti zu erklären. Alle anderen paradoxen Mengen beruhen auf dem gleichen verfehlten Bildungsgedanken. Auch die Paradoxien der Menge aller Dinge, Menge aller Gedanken, Menge aller Sätze tragen den Typus der mathematischen Paradoxien, obwohl die Mengen selbst nicht mathematischer Struktur sind.

Innerhalb der Bestrebungen, die Paradoxien zu lösen, sind zwei Richtungen deutlich zu erkennen. Während die einen Forscher nur die Mengenlehre, bezw. die Mathematik, erschüttert glaubten, sahen die anderen in den Paradoxien eine Gefährdung oder eine Unzulänglichkeit der gesamten Logik. „Die einen Autoren sahen sich deshalb veranlaßt, das gesamte Fundament der exakten Wissenschaften einer Kritik zu unterziehen,"[3] die soweit ging, daß man sogar den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht mehr als voll gültig anerkennen zu dürfen glaubte. Diese Gedankengänge knüpfen sich an die Namen Brouwer und Weyl. Auf die Arbeiten von Weyl und Brouwer, die philosophisch gehalten sind und die die Fundamente der Logik einer Kritik unterziehen, müssen wir später noch näher eingehen.

*) Hilbert: Ueber das Unendliche; Math. Annalen 95, S. 169.
2) Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre. S. 634.
3) J. v. Neumann: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Crelle 154, S. 220.

Die anderen Forscher begnügen sich damit, den „naiven" Begriff der Menge auszuschalten und ihn durch ein Axiomsystem zu ersetzen, weil sich zeigte, daß die Cantor'sche Mengendefinition so allgemein gehalten war, daß sie auch die paradoxen Mengen zuließ. Diese Forscher formulieren die Postulate der Mengenlehre derart, „daß die bekannten Antimonien verschwinden, wenn man die vorgeschlagenen Prinzipien zu Grunde legt".[4]

Aber bereits Neumann bemerkt hierzu, daß dadurch keineswegs die Antinomien der Cantor'schen Mengenlehre erklärt sind. Es ist vielmehr nur gezeigt, daß sie durch gewisse Beschränkungen des Axiomsystems vermieden werden können. Ein solcher Versuch liegt auch bei Russel vor, der in seiner Typenlehre nur die Mengen eines bestimmten Typus zusammenzufassen erlaubt, nicht aber verschiedene Typen. In ähnlichen Bahnen wie die Russel'sche Typenlehre bewegt sich der Gedanke von J. König, der die Zahlen der zweiten Zahlklasse zu den sogenannten „werdenden" Mengen rechnet, die dann mit den Mengen der ersten Zahlklasse nicht mehr in linearer Beziehung auftreten können. Wenn also als neues Axiom der Satz eingefügt wird, daß verschiedene Typen nicht mehr zusammenfaßbar sind, so ist damit noch nicht erklärt, warum dies nicht der Fall sein darf. Russel und König können darauf nur die Antwort geben: Das Beschränktheitsaxiom ist einzuführen, weil der Aufbau der Mengenlehre sonst zu Paradoxien führt. Die Frage nach dem Grund der Paradoxien oder nach dem Sinn des Beschränktheitsaxioms bleibt nach wie vor unbeantwortet.

Einen bedeutsamen Lösungsversuch im mathematischen Sinne hat in neuester Zeit Paul Finsler[5] unternommen. Er zeigt, daß es zirkelhafte und zirkelfreie Mengen gibt. Solche zirkelhafte Konstruktionen können unter Umständen eindeutig ausführbar sein; es kann aber auch Fälle geben, bei denen die Konstruktion unbestimmt wird und solche, bei denen der Zirkel nicht erfüllbar ist. Als Beispiel einer zirkelhaften Definition führt Finsler die Gleichung:

$$x = f(x)$$

an. Es gibt Fälle, in denen diese Konstruktion nicht ausführ-

4) J. v. Neumann, a.a.O. S. 220.
5) Finsler: Ueber die Grundlegung der Mengenlehre, Math. Zeitschrift 25. S. 687.

bar ist, also die Lösung der Gleichung unbestimmt bleibt, z. B. wenn man in der speziellen Gleichung:

$$x = a + b\,x$$

(die natürlich zirkelhaft ist)

$$a = 1,\ b = 1 \text{ oder } a = 0,\ b = 1$$

setzt. Im ersten Falle gibt es keine Lösung, im zweiten Falle bleibt diese unbestimmt.

Während aber in den Paradoxien der Grund des Zirkels nicht angebbar ist, ist er bei dieser Gleichung sofort zu erkennen. Die Unmöglichkeit der Definition ergibt sich auf Grund der Definition des Körpers der ganzen Zahlen, in dem die Division durch Null ausgeschlossen ist.

Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$x = \frac{a}{1 - b}$$

so sieht man, daß es für $b = 1$ keine Zahl gibt, die die Bedingungen dieser Gleichung erfüllen könnte; die Gleichung ist also selbst nicht möglich, weil die Unbekannte x keiner möglichen Zahl entspricht; sie soll eine Zahl darstellen, die grundsätzlich nicht definiert ist. Die Definition ist also deswegen unmöglich, weil sie einen nicht erfüllbaren Zirkel auf Grund der Zahlsetzung enthält. Bei den Paradoxien kann Finsler jedoch nur schließen, daß z. B. die Menge aller Ordnungszahlen nicht existiert, weil sie einen unerfüllbaren Zirkel enthält. Es müßte konsequenterweise erklärt werden, daß dieser unerfüllbare Zirkel auf Grund der Mengensetzung ausgeschlossen ist. Der Grund aber, warum die Mathematik überhaupt die Forderung eines unerfüllbaren Zirkels auch nur stellen kann, wird auch von Finsler nicht angegeben. Finsler sieht zwar richtig, daß in der Aufgabe zwei sich widersprechende Forderungen vorhanden sind. Aber welcher unberechtigte Ansatzpunkt zur Stellung einer solchen Aufgabe, zu einer solchen Forderung, führen kann, bleibt unerledigt. Sein Lösungsversuch stellt deshalb nur denselben Sachverhalt wie der König'sche, Russel'sche und der Zermelo'sche Versuch dar, die Paradoxien zu beseitigen, jedoch nicht zu erklären. Nur ist hier die Paradoxie bereits in die Aufgabe, nicht erst in das Objekt gelegt. Eine zirkelhafte, auf eine paradoxe Menge führende Konstruktion wird überhaupt verboten, und zwar aus dem Grunde, weil sie auf eine

paradoxe Menge führt. Finsler sagt wörtlich: (S. 702) „Beliebige Mengen können nur dann nicht eine neue Menge bilden, wenn die Definition der neuen Menge einen unerfüllbaren Zirkel enthält; denn ein anderer Hinderungsgrund ist nicht denkbar".

Schon Hessenberg hat auf die Unzulänglichkeit solcher Lösungsversuche hingewiesen.[6] Ihre Quintessenz besteht eben darin, daß man die Unerfüllbarkeit des Zirkels ad hoc einsieht und daraus auf die Unmöglichkeit der Definition schließt. Es ist im Grunde dasselbe, als wenn man sagte: Eine solche Menge ist nicht zulässig, weil sie paradox ist. Damit ist wiederum über das Problem des Paradoxons selbst nichts ausgesagt. Es ist nur beseitigt. Wenn Finsler sagt: „Wenn man sich überzeugt hat, daß beliebigen vorgegebenen Dingen nicht stets eine Menge zu entsprechen braucht, (nämlich dann nicht, wenn die Bildung derselben einen unerfüllbaren Zirkel bedeutet), so verschwinden die bekannten Widersprüche",[7] dann ist das nichts anderes, als der längst bekannte Vorschlag der Mathematiker, den Begriff „Menge" nur für solche Gebilde zu reservieren, die nicht paradox sind. Damit ist aber der Begriff des Paradoxons aus der Mathematik nicht beseitigt. Es spielt sogar die Rolle eines Entscheidungskriteriums.

Es erhebt sich sofort die Frage nach der Möglichkeit dieses Kriteriums. Ist es möglich, den Begriff Menge für ein bestimmtes Gebilde in Ansatz zu bringen und hinterher auf Grund eines Paradoxons zu erklären, daß er dafür nicht in Ansatz gebracht werden darf? Man könnte einwenden, daß dieser Schluß einem indirekten Beweise gleichkomme. Zunächst scheint es so: Es wird angenommen, X sei eine Menge. Nun ist X aber paradox. Also ist es keine Menge.

Doch ergibt sich sofort ein entscheidender Unterschied zwischen diesem Schlusse und dem indirekten Beweise. Der indirekte Beweis ergibt, daß ihm eine f a l s c h e Annahme zu Grunde gelegt wurde, nicht eine, deren Falschheit oder Richtigkeit erst ein Problem ist. Die f a l s c h e A n n a h m e hat aber im Rahmen anderer Beziehungen durchaus einen Sinn, sie stellt selbst eine mögliche B e z i e h u n g dar und ist nur falsch in Bezug auf eine Beziehung; sie ist aber nicht von vornherein sinnlos. Die paradoxe Annahme stellt aber überhaupt keine mögliche Beziehung dar. Sie kann mit keinem an-

6) Hessenberg, a.a.O. S. 630.
7) Finsler: Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. S. 689.

deren Objekt eine mögliche Beziehung eingehen. Niemals kann es sich im indirekten Beweise um Objekte handeln, die schlechthin sinnlos sind. Niemals können in ihm Beziehungen der Voraussetzung angezweifelt werden, wie dies bei obigem Schlusse der Fall wäre. Der indirekte Beweis betrifft nicht den Sinn der Voraussetzung, weil die Voraussetzung überhaupt erst der Ansatzpunkt des Beweises ist und ihn ermöglicht. Von einer paradoxen Menge auf die Unmöglichkeit ihrer Bildung zu schließen, stellt keinen möglichen mathematischen Schluß dar. Diesem Schluß fehlte die Prämisse. Sie enthält bereits die Paradoxie und ist deshalb nicht möglich.

Eine Erklärung oder eine Lösung ist demnach die Finslersche Areit nicht, wohl aber eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Nach wie vor bleibt die Frage nach dem Grunde der Paradoxie zu erledigen. Diese Frage ist aber, wie sich zeigen wird, kein mathematisches Problem, sondern eine Angelegenheit der Philosophie.

Zunächst könnte es so scheinen, als seien die Paradoxien ein bisher mathematisch ungelöstes Problem wie etwa der Fermat'sche Satz, und als wäre das Unterfangen, auf philosophischem Wege zu einer Klärung der Paradoxien zu gelangen, ein Eingriff des Philosophen in die Mathematik, der ihm nicht zusteht. Handelt es sich doch, so könnte man sagen, bei den Paradoxien um die Forderung der Beseitigung gewisser Fehler, die in falschen mathematischen Schlüssen bestehen. Dem ist aber nicht so. Es handelt sich bei der Frage der Paradoxien keineswegs darum, die Schlußmethoden der Mathematiker nachzuprüfen, sondern es geht um den Sinn dieser Schlüsse. Damit treten wir hinter die Front der Mathematik zurück. Es handelt sich um die Frage: Wenn Paradoxien auftreten, wie sind sie möglich? Hierbei handelt es sich um eine Fragestellung der Philosophie. Es geht bei den Paradoxien gar nicht um die Beantwortung der Frage „richtig oder falsch?". Diese Frage könnte nur derMathematiker lösen. DasParadoxon verhindert vielmehr den Mathematiker an der Entscheidung, etwas richtig oder falsch zu nennen. Es betrifft somit den Sinn der Beziehung „richtig — falsch". „Der Paralogismus besteht", wie Kant es ausdrückt, „stets in der Falschheit eines Vernunftschlusses der Form nach".[8] Unser Verfahren wird

8) Kritik der reinen Vernunft. Herausgegeben von Kehrbach. S. 293.

also das sein müssen, das Kant mit „skeptischer Methode" bezeichnet, die darin besteht, „zu untersuchen, ob der Gegenstand (der Behauptung) nicht vielleicht ein bloßes Blendwerk sei". Diese Methode dient dazu, den Forscher, also den Mathematiker, „auf die Momente in Bestimmung ihrer Grundsätze aufmerksam zu machen".[9]

Diese Methode ist philosophisch und liegt hinter der Front der betreffenden Wissenschaft. „In der Mathematik würde ihr Gebrauch ungereimt sein"[10], weil die Behauptungen der Mathematik, sofern sie „an dem Faden der reinen Anschauung und zwar durch jederzeit evidente Synthesis fortgehen müssen", nur in der Schicht der Korrelation „richtig — falsch" liegen können oder wie Kant sagt, daß „sich in ihr keine falschen Behauptungen verbergen oder unsichtbar machen können",[11] denn von jeder Behauptung der Mathematik muß die Entscheidung „richtig oder falsch" getroffen werden können.

Schon Hessenberg vermutet, daß die Paradoxien im Zusammenhang mit denjenigen Antinomien stehen, die Kant aufgestellt hat.[12] Er hat darin recht insofern, als es sich bei den Paradoxien um die falsche Lokalisation eines Objekts handelt, die Fragestellung mithin ins Gebiet der Philosophie gehört. Er sagt wörtlich: „Für den Philosophen aber erwächst gerade hier ein neues Arbeitsfeld, das von den Mathematikern heute noch vielfach mit dem logozistischen Vorurteil betreten wird."[13]

Das Problem der Philosophie in Beziehung auf unseren Gegenstand sei mit kurzen Strichen gekennzeichnet.

Philosophie als Theorie des Gegenstandes bestimmt die Struktur der Objekte der Wissenschaften im Sinne bestimmter Invarianten. Mit Invarianten sind hier selbstverständlich nicht die wohldefinierten Objekte gemeint, mit denen es die Mathematik zu tun hat. Invarianten im philosophischen Sinne sind diejenigen Bedingungen, die den Sachverhalt der Mathematik ermöglichen. Im Sachverhalt der Mathematik prägt sich auf eine ganz bestimmte Art die Eindeutigkeit aus. Durch diese Ausprägung ist die Existenz des mathematischen Ob-

9) Kant: a.a.O. S. 351 ff.
10) Kant: a.a.O. S. 351.
11) Kant: a.a.O. S. 351.
12) Hessenberg: a.a.O. S. 633.
13) Hessenberg: a.a.O. S. 706.

jekts verbürgt. Hinter diese Funktion der Eindeutigkeit zurücktreten heißt, hinter die Front der Mathematik zurücktreten. Die Invarianten sind demnach Letztheiten, hinter die zurückzugehen mathematisch keinen Sinn mehr hat. Es sind die aus dem „est" des Urteils transzendental abgeleiteten Bedingungen, die der Mathematik ihren Charakter als selbständige Wissenschaft verleihen. Sie sind in den Urteilen der Mathematik „invariant" und unterscheiden diese damit von den Urteilen der anderen Wissenschaften. Wie auch immer in der Mathematik konstruiert und demonstriert wird, wie auch immer funktionale Zusammenhänge in mannigfacher Art sich gliedern, unter welchen Gesichtspunkten auch immer die Objekte der Mathematik wechselvolle Beziehungen eingehen mögen, stets ist eine Voraussetzung für diese Gesetzlichkeiten, daß etwas in dieser Mannigfaltigkeit der Kombinationen seinen Sinn unwandelbar behält, nämlich diejenigen Bedingungen, die diese ganze Mannigfaltigkeit tragen und sie ermöglichen. Dies sind die Invarianten der Mathematik, die Bedingungen für die Geltung mathematischer Urteile, Funktionen der Gegenständlichkeit und aus dieser transzendental ableitbar. Diese Invarianten sind die Kriterien der Existenz für ein wissenschaftliches Objekt und für seine Möglichkeit verantwortlich. Aussagen, die die Struktur eines Objekts als Funktion bestimmter Invarianten bestimmen, sind immer philosophischer Natur, weil diese Invarianten Funktionen der Gegenständlichkeit sind. Innerhalb einer bestimmten Wissenschaft stellt die Frage nach der Abhängigkeit ihrer Objekte von den Invarianten kein mögliches Problem mehr dar; denn die Aufgaben der betreffenden Wissenschaft setzen diese Invarianten, das heißt die Möglichkeit ihrer Objekte, bereits voraus. Die Frage nach der Möglichkeit ist eine Frage der Theorie der Geltung und damit ein Problem der Philosophie. Innerhalb der Mathematik wird von allen Objekten vorausgesetzt, daß sie Beziehungen darstellen, die einer eigentümlichen Ordnungsgesetzlichkeit genügen. Bestünde diese Voraussetzung nicht, so fehlten der Fragestellung der Mathematik diejenigen Bedingungen, die sie als mathematisch kennzeichnen, das heißt, man könnte von dem Problem nicht mehr sagen, es sei mathematisch. Da nun der Begriff der Paradoxie ein Problem der Geltung ist, gehört das Problem der Paradoxie nicht mehr zu den mathematischen Problemen. Daher

kann das Problem nicht auf mathematischem Wege gelöst werden, weil innerhalb der Mathematik nicht mehr die Möglichkeit des Objektes in Frage steht, wie es hier der Fall ist.

Man könnte vielleicht geneigt sein, bei diesen Betrachtungen auf die bekannten mathematischenExistenzbeweise hinzuweisen und behaupten, es handle sich bei ihnen darum, die Möglichkeit eines Objekts zu beweisen. Doch handelt es sich bei den Existenzbeweisen stets um die Frage, ob ein bestimmtes mathematisches Objekt einer wohldefinierten Beziehung genügt, niemals darum, ob eine Beziehung den Invarianten der Mathematik genügt. In der neueren mathematischen Literatur sind diese beiden ganz verschiedenartigen Untersuchungen, von denen die eine mathematisch, die andere philosophisch ist, oft nicht scharf auseinander gehalten worden, weil der Begriff der mathematischen Existenz nicht scharf genug gefaßt war. So kam es, daß man von Existentialsätzen wie: „Es gibt Punkte" sprach und sie den Existentialsätzen über die Lösung der Differentialgleichungen an die Seite stellte.

Alle Versuche, das Problem der Paradoxien mit mathematischen Methoden zu l ö s e n, mußten deshalb fehlschlagen, weil das Problem der Paradoxien hinter der Fragestellung der Mathematik liegt. Die Versuche, das Paradoxon zu beseitigen, verlangen von der Philosophie die Klärung der Frage: Wenn bei den gelungenen Versuchen Paradoxien nicht mehr auftreten, welche nunmehr vermiedenen Fehler in der Struktur des mathematischen Objekts, das die Paradoxie veranlaßte, waren der Grund für diese Paradoxie? Nach diesen Fehlerquellen fragen heißt demnach nicht Mathematik treiben. Es kann sich also in dieser Arbeit nicht darum handeln, solche Axiome und Definitionen aufzustellen, die paradoxe Objekte vermeiden. Dies ist eine Forderung, die der Philosoph an den Mathematiker stellen muß. Ihr ist in Mathematikerkreisen auch bereits genügt worden. Im Problem der Paradoxie grenzen sich also die Probleme der Philosophie und der Mathematik scharf gegeneinander ab: Dem Mathematiker fällt die Beseitigung des Paradoxons zu, dem Philosophen die Aufgabe, nach dem Sinn dieser Forschungstätigkeit des Mathematikers und damit nach den Gründen für das Auftreten des Paradoxons zu fragen.

Daher sind auch die Arbeiten, die bis jetzt über die Paradoxien vorliegen, in zwei Klassen zu teilen: Die erste geht von

der Forderung aus, die Paradoxien zu vermeiden, und begründet die Mengenlehre so, daß Paradoxien nicht mehr auftreten. Diese Autoren setzen einfach diese Forderung der Philosophie, die diese bis jetzt noch nicht begründen konnte, als berechtigt voraus. Die zweite Klasse stellt sich die Aufgabe, eine Begründung dieser Forderung zu geben.

Damit fallen aus einer näheren Betrachtung in dieser Arbeit die zahlreich auf diesem Gebiet erschienenen Arbeiten heraus, die nur um eine Vermeidung des Paradoxons bemüht sind. Es sind dies die Arbeiten von Schönfließ, Fränkel, Zermelo, Chwistek u. a. Der Inhalt dieser Arbeiten geht uns nichts an, vielmehr nur ihr Sinn, über den in den meisten dieser Versuche nichts gesagt ist, weil es nicht Sache der Mathematik ist, ihr eigenes Verfahren zu rechtfertigen. Für uns handelt es sich darum, aufzuzeigen, daß der Begriff des mathematischen Objektes Paradoxien nicht zuläßt.

II.

Wir müssen nun einen kurzen Blick auf diejenigen Arbeiten werfen, die mit dem Anspruch auftreten, L ö s u n g s versuche der Paradoxien zu sein, die also philosophisch sind. Wir sprachen schon davon, daß in ihren Grundlagenforschungen Brouwer und Weyl dahin gekommen sind, sogar den Satz vom ausgeschlossenen Dritten in Zweifel zu ziehen. Weyl besonders ist darauf bedacht, die Mathematik von einem derart „unsicheren Sachverhalt", wie ihn nach seiner Meinung die Logik darstellt, unabhängig zu machen. Auch Russell schließt aus dem Umstande, daß das Paradoxon der Menge aller Mengen auf eine logische Form gebracht werden kann — es handelt sich um das Paradoxon der prädikablen und imprädikablen Prädikate — die Unsinnigkeit der Behauptung, die Mathematik verdanke ihre Sicherheit lediglich der Logik.. Ebenso stellen die Grundlegungsversuche Hilberts und seiner Schule (Bernays, Neumann u. a.) den Versuch dar, den Bestand der Mathematik unabhängig von jeder Logik sicher zu stellen. Hilbert führt dabei eine offenbar mißverstandene Bemerkung Kants an: „Schon Kant hat gelehrt, ... daß die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt, und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann."[14] Aehnlich äußert sich Bernays, der behaup-

14) Hilbert, a.a.O. S. 171.

tet, daß Mathematik und Logik zum mindesten gar nicht in dem Verhältnis von Besonderem und Allgemeinem stehen.

Eine kurze Bemerkung genügt zur Klärung des Sachverhaltes. Mathematik ist Funktion der Geltung, muß also der Gesetzlichkeit des Urteils genügen, zwar nicht so, daß die Mathematik formal aus der Form des Urteils ableitbar wäre, aber doch so, daß die Invarianten der Mathematik transzendental aus dem Urteil ableitbar sind. Unabhängigkeit von der Logik bedeutet also nicht, daß Logik und Mathematik in keinerlei Beziehung zueinander stehen. Es bedeutet, daß diese Beziehung nicht formal, sondern transzendental ist. Mathematische Begriffe lassen sich nicht aus der Form der Urteilsbeziehung ableiten. Oder anders ausgedrückt: Das Prinzip des Widerspruchs ist lediglich ein negatives Existenzkriterium für mathematische Urteile. Zu ihm muß als positives die „reine Anschauung" treten.[15]

Wir knüpfen zunächst an die Brouwer'sche Arbeit an. Brouwer meint, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten zwar im Endlichen seine Gültigkeit besitzt, jedoch für unendliche, sogenannte „freisteigende Folgen" aufhört, voll gültig zu sein. Eine solche freisteigende Folge, kann man sich z. B. folgendermaßen entstanden denken. Man denkt sich ein unendlich lange währendes Würfelspiel. Die in diesem Würfelspiel auftretenden Zahlen stellen die freisteigende Folge F dar. Die beiden Sätze:

Es gibt in der Folge F eine Zahl E,
Es gibt in der Folge F keine Zahl E,

sind möglicherweise nicht entscheidbar, da ich ja z. B. nicht wissen kann, ob die Zahl E, die eine von den im Würfelspiel möglichen Zahlen darstellt, in der Folge F noch auftreten wird, wenn sie bis zu einem gewissen Zeitpunkt nicht vorgekommen ist.

Ebenso äußert sich Weyl in seiner Schrift: „Das Kontinuum" (S. 12) „daß es sich sehr wohl ereignen kann, daß weder die Existenz, noch die Nichtexistenz einer Zahl r eine Folge der arithmetischen Axiome ist." „Daß von zwei entgegengesetzten einschlägigen Urteilen U und U' eines und nur eines eine Folge der Axiome ist... wissen wir nicht (wenn wir es vielleicht auch glauben)."

15) Vergl. hierzu Hönigswald: Zum Streit um die Grundlagen der Mathematik.

Diese Anschauungen haben dann eine größere Anzahl von Arbeiten hervorgerufen, die darauf hinausliefen, entweder die Entscheidungsforderung als neues Axiom unter die bestehenden einzureihen oder das Entscheidungsaxiom aus den übrigen Axiomen herzuleiten. Ein Teil der Mathematiker gibt sich damit zufrieden, Sätze, die nicht entscheidbar sind, als möglich anzuerkennen, und Weyl macht dazu die Bemerkung, dies passe sehr gut zu unserer Anschauung; denn z. B. beim „anschaulichen Kontinuum" gehe das Getrenntsein zweier Zahlen beim Zusammenrücken sozusagen graduell vor sich, und zwar vollziehe es sich in „vagen Abstufungen" und gehe „graduell über in die Ununterscheidbarkeit".[16] Aehnlich äußert sich Schmeidler in einem Vortrage auf der 31. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Breslau, daß diese Tatsachen nicht weiter erstaunlich seien, seien sie doch dem angewandten Mathematiker schon immer bekannt, weil seine Methoden doch nur Näherungsmethoden seien. In den mathematischen Annalen 93 (Begründung des „tertium non datur" mittels der Hilbert'schen Theorie der Widerspruchsfreiheit) bemüht sich Ackermann darum, die Sätze über das Unendliche, für die das Entscheidungsproblem nicht immer lösbar sei, auf finite Formeln zurückzuführen, von denen man ja e r f a h r u n g s g e m ä ß wisse, daß auf sie das „tertium non datur" anwendbar sei. (Bei endlich vielen Würfen des Würfelspiels ist ja die Alternative:

Es gibt in der Folge F eine Zahl E,
Es gibt in der Folge F keine Zahl E,

entscheidbar.) Aber zu erklären, woran es liegt, daß niemals zwei beweisbare Formeln U und U' vorkommen (und vorkommen dürfen), hält auch er nicht für möglich.

Wie liegen die Dinge im Angesicht dieser Sachlage, die für unser Problem höchst bedeutsam sind? Denn hier entscheidet sich das Problem der Lösung der Paradoxien. Wenn es so wäre, daß nicht entscheidbare Sätze möglich wären, so hörte das Problem, die Paradoxien lösen zu wollen, auf, sinnvoll zu sein. Die Paradoxie wäre dann eben ein nicht entscheidbarer Satz, und der Philosoph und Mathematiker müßte sich damit abfinden. Doch läßt sich leicht einsehen, daß unentscheidbare Sätze in der Mathematik, wie überhaupt in-

16) Weyl: Philosophie der Mathematik, S. 43.

nerhalb der Erkenntnis nicht möglich sind, das „Tertium non datur" also gilt.

Zunächst zum Brouwer'schen Würfelspiel! Geschähe der Aufbau des Kontinuums wirklich in der Art des Würfelspiels, so würden die Setzungen der Mathematik in eine Abhängigkeit von der Tatsache des Vollzuges gesetzt werden, die der Mathematik den Charakter der „Reinheit" nehmen würde. Mathematische Setzungen enthalten wohl die Bedingungen des Vollzuges, enthalten ihn als zu lösende Aufgabe, sie sind aber von der Tatsache des Vollzuges unabhängig. Setzung ist Konstruktion, nicht Operation. Nur sofern sie Konstruktion ist, bestimmt sie die Operation.

Das Würfelspiel, ebenso wie der Brouwer'sche Aufbau des Kontinuums setzen eine wohlbestimmte Zahl voraus, und andererseits eine wohlbestimmte Folge, in der diese Zahl prinzipiell als möglich gedacht wird. Bei einem Spiel mit einem Würfel wird die Folge z. B. durch die Zahlen von 1—6, die nur auftreten können, dargestellt, und die Zahl E, die möglicherweise im Laufe der Operation auftreten kann, kann nur eine der sechs Zahlen sein. Daß diese bestimmte Operation, nämlich das Auswürfeln, die Entscheidung, ob E in der Folge, die durch das Würfelspiel auftritt, wirklich nicht liefert, sagt nichts darüber, daß es p r i n z i p i e l l unentscheidbar ist, sondern besagt nur etwas über die betreffende Operation. Ebensowenig besagen die Resultate der angewandten Mathematik, die mit den ihr zu Gebote stehenden Hilfsmitteln nur einen bestimmten Grad der Genauigkeit erreicht, etwas über die Bestimmtheit der Setzung. Die Setzung ist nicht vom Grade der Genauigkeit abhängig, sondern das Umgekehrte ist der Fall: der Grad der Genauigkeit empfängt seinen Sinn von der Setzung.. Der „Grad der Genauigkeit" ist selbst eine Funktion der Bestimmtheit. Eine Operation für eine Entscheidung in Gang setzen heißt nämlich nichts anderes, als die Möglichkeit der Entscheidung vorauszusetzen, und die betreffende Operation gewinnt nur von dieser Möglichkeit her ihren Sinn. Nun soll es sich ja beim Brouwer'schen Aufbau des Kontinuums nicht um einen Sachverhalt des Vollzuges handeln, sondern um eine Methode, um die Gesetzlichkeit einer Folge. Aber die Brouwer'sche freisteigende Folge enthält die Bedingung des Vollzuges in der Weise, daß sie dem Sachverhalt der angewandten Mathematik gleichkommt. Die Konstruktion

wird in Abhängigkeit von ihrer tatsächlichen Ausführung gesetzt.

Wäre es so, wie Brouwer glaubt, daß es prinzipiell unbestimmt wäre, ob eine Zahl einem Intervall angehört oder nicht, so hätte es keinen Sinn zu sagen: Eine Operation liefere die Entscheidung nicht. Man wüßte von der Operation schlechterdings nicht, wie sie eigentlich entscheiden sollte, das heißt, sie hörte auf sinnvoll zu sein. Die Behauptung, daß Folgen, wie sie das Würfelspiel darstellt, keinen Weg zur Bestimmtheit eines Sachverhaltes darstellen, heißt lediglich, daß sie die Methode der Lösung verfehlen. Indem sie sie aber verfehlen, setzen sie die Lösung selbst als möglich voraus. Die Brouwer'schen Folgen verletzen also nicht nur nicht den Satz vom ausgeschlossenen Dritten, sondern bewähren ihn, indem sie ihn ihrem eigenen Verfahren voraussetzen. Wenn das Würfelspiel nicht zu dem gewünschten Ziele führt, so ist es nichts weiter als ein für die betreffende Aufgabe ungeeignetes Rechenverfahren, ein Verfahren, das der Aufgabe nicht genügt, und damit keinen möglichen Vollzug für die Aufgabe darstellt. (Im Würfelspiel ist es außerdem so, daß bei ihm Invarianten in Ansatz zu bringen sind, die außerhalb der mathematischen Betrachtungsweise liegen; es kann also kein Kriterium für die Bestimmtheit eines mathematischen Objekts sein.) Wenn man leugnet, daß eine gewisse Operation zur Bestimmtheit führt, so setzt man die Bestimmtheit des Sachverhaltes voraus. Man wüßte schlechterdings nicht, was „freisteigende Folge" bedeuten solle, wenn sie nicht dem Gesetz der Bestimmtheit unterläge. Behauptet man, es sei grundsätzlich unbestimmt, ob in der freisteigenden Folge F das Element auftrete oder nicht, so behauptet man nichts über die Unbestimmtheit des Elementes E, wohl aber über die des Begriffs „freisteigende Folge", die ihrer eigenen Setzung nicht gerecht wird, also keine Gesetzmäßigkeit darstellen kann, höchstens eine unzulängliche Operation einem bestimmten Ansatz gegenüber.

Daß diese Begriffe, die dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht genügen sollen, wirklich nur eine unzulängliche Operation, also einen verfehlten Ansatz darstellen, kommt deutlich in den Ausführungen O. Beckers[17] zum Ausdruck, der als Beispiel den großen Fermat'schen Satz anführt und

17) Mathematische Existenz. Jahrbuch für Philosophie 8. S. 451 ff.

behauptet, es handle sich bei ihm um etwas Aehnliches wie bei den Brouwer'schen freisteigenden Folgen: Es sei nämlich durch P r o b i e r e n nicht entscheidbar, ob die Gleichung:

$$X^n + Y^n = Z^n$$

für ganze n lösbar sei. Man könnte ebenso einwenden, es läßt sich dies mit Hilfe des kleinen Einmaleins oder durch Würfeln nicht entscheiden. „Probieren" ist eben kein Ansatz, der den Bedingungen der Fermat'schen Aufgabe genügt.

Von der „freisteigenden Folge", wie sie Brouwer vorschwebt, kann man also behaupten, daß es ihre Funktion ist, etwas nicht zu bestimmen, von dem man nicht einmal sagen könnte, was es eigentlich sei, weil die Folge, die es bestimmen soll, ihre Funktion verfehlt und es nicht bestimmt. Die Folge verfällt damit selbst der völligen Bestimmungslosigkeit. Man könnte nur sagen, daß sie nur einer Bedingung genügt, nämlich der Willkür, sofern man überhaupt dabei von Bedingung sprechen kann. Sie hört damit auf, mathematisch bestimmt zu sein, weil sie den Invarianten der Mathematik nicht genügt.

Wenn weder die Existenz noch die Nichtexistenz einer Zahl, um mit Weyl zu reden, eine Folge der Axiome ist,[18] so ist zu fragen, wie denn diese Zahl eigentlich definiert sei. Von einer Zahl die Aussage machen, daß sie aus gewissen Axiomen nicht folgt, setzt voraus, daß diese Zahl bereits axiomatisch festgelegt ist, um von ihr überhaupt etwas aussagen zu können. Es heißt voraussetzen, daß die Zahl, die durch bestimmte Axiome nicht festgelegt ist, in anderer und dennoch wohlbestimmter Weise, definiert ist. Ob dieses Axiom dennoch aus den übrigen ableitbar ist oder nicht, ist eine rein mathematische Angelegenheit.

Behauptet man von einem Satz, daß er aus einem gewissen Axiomsystem n i c h t folgt, so setzt man gleichzeitig diesen Satz als neues Axiom zu den übrigen und legt damit die Existenz dieses neuen Objektes fest.. Die Definition ist damit so gegeben, daß sie aus dem Axiomsystem weder folgt, noch zu ihm in Widerspruch tritt; sie steht also zu dem Axiomsystem in einer eindeutigen Beziehung. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist für das betreffende Objekt vorausgesetzt. Er ist bereits in Ansatz gebracht, wenn ich überhaupt vom mathematischen Objekt spreche und eine Zahl in

18) Weyl: Das Kontinuum. S. 12.

Beziehung zu einem Axiomsystem setzen will, und sei es nur auch in die der Unabhängigkeit von ihm. Denn mathematisches Objekt sein heißt bestimmt sein und damit auf nicht widerspruchsvolle Art gegeben sein.

Wie steht es also um die Behauptung der Unentscheidbarkeit dafür, daß von zwei Sätzen U und U' einer und nur einer eine Folge der Axiome ist? Geben die Axiome über den Sachverhalt U oder U' prinzipiell keine Entscheidung, bestimmen also keinen von beiden Sätzen, so ist U oder U' als neues Axiom bereits gesetzt, weil man es in Beziehung zu dem System der Axiome gebracht hat. Nichts über die Bestimmtheit von U oder U' wird durch die Behauptung der Nichtentscheidbarkeit ausgesagt, sondern etwas über die Lückenhaftigkeit des Axiomsystems. Gleichzeitig wird an den Mathematiker die Forderung gestellt, das Axiomsystem durch dieses Axiom zu ergänzen.

Müssen wir also von einem vollständigen Axiomsystem verlangen, daß entweder U oder U' aus ihm folgt, oder könnte man den Sachverhalt prinzipiell offen lassen? Oder müssen wir, wie es Hilbert tut, diese Forderung als neue Formel dem Axiomsystem hinzufügen? Es könnte, wie schon gesagt, keins von beiden herauskommen. Dann wäre das Axiomsystem unvollständig. (Beispiel: Die euklidischen Axiome ohne das Parallelenaxiom.) Könnte man aber zulassen, daß beides herauskommt? Daß Weyl auf dem Standpunkt steht, dies als prinzipiell möglich zuzulassen, ersieht man aus seinen Ausführungen zur Hilbert'schen Beweistheorie.[19] „Es ist nicht abzusehen, warum man gerade Wert darauf legt, daß das Formelspiel (gemeint ist der Hilbert'sche Formalismus) „widerspruchsfrei" ist."... „Solange man auf diesem Standpunkt verharrt, ist man in der Tat aller Philosophie enthoben und es gibt keine andere Einwendung dagegen, als die Erklärung: Ich spiele nicht mit.[20] Wie liegen angesichts dieses Sachverhaltes die Dinge? Warum muß der Mathematiker für sein Axiomsystem die Widerspruchsfreiheit fordern? Es genügt hier nicht, mit Finsler einfach die Bemerkung zu machen, daß sich auf ein widerspruchsvolles Axiomsystem „eine exakte

19) Weyl: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Mathematische Zeitschrift 20.

20) S. 148. (Weyl sagt dies in Beziehung auf das Schachspiel ,das ja in völliger Analogie zum Hilbert'schen Formelspiel, auch von Hilbert selbst angeführt worden ist.)

Wissenschaft ... doch wohl nicht gründen läßt." Es muß vielmehr aus der Forderung der Widerspruchsfreiheit eines Axioms die Forderung der Widerspruchsfreiheit des Axiomsystems folgen, weil das System als Ganzheit der Bedingung der Setzung genügen muß. „Widerspruchsfreiheit ist eine Bedingung, der jede Setzung als solche, also gänzlich unabhängig von der Art ihrer Begründung ... unterliegt."[21] Die Widerspruchsfreiheit ist nichts anderes als die Forderung, das Axiomsystem müsse im Sinne der Eindeutigkeit bestimmt sein, das heißt, eine Funktion der Geltung sein. Daß das einzelne mathematische Objekt eindeutig definiert sein muß, haben auch Brouwer und Weyl nicht bestritten, denn es hätte keinen Sinn, von einem Objekt zu sprechen, wenn es in sich einen Widerspruch enthielte. Nur auf das System der Axiome bezieht sich der Einwand von Brouwer und Weyl. Das System der Axiome stellt aber ein System gültiger Beziehungen dar. Die Bedingung, der jede Beziehung schon als Beziehung genügen muß, ist die Gegenständlichkeit; also muß das System der Axiome dieser obersten Bedingung gleichfalls genügen. Als mathematische Beziehung muß das System der gleichen Bedingung gehorchen, der ein Axiom gehorcht, weil in diesem System jedes Axiom auf das andere verweist und seinen Sinn durch alle anderen erhält. Daher dürfen sich diese Beziehungen nicht widersprechen, wenn sie nicht der vollständigen Bestimmungslosigkeit verfallen wollen. Es gilt für die mathematische Beziehungsmannigfaltigkeit dasselbe oberste Gesetz der Geltung, das für jede gilt. „Von welchem Inhalt auch unsere Erkenntnis sei ..." sagt Kant, „so ist doch die allgemeine, obzwar nur negative Bedingung aller unserer Urteile überhaupt, daß sie sich nicht selbst widersprechen; widrigenfalls diese Urteile an sich selbst nichts sind."[22]

Diese Beziehung, die zwei Axiome miteinander verknüpft, muß derselben Bedingung genügen, unter der ein Axiom besteht. Ergäbe sich ein Widerspruch aus zwei Axiomen oder ihren (wieder nach dem Satz vom Widerspruch) gezogenen Schlüssen, so wäre dieser selbst wieder unter Bedingungen zu untersuchen, die den Satz vom Widerspruch voraussetzen. Der Satz vom Widerspruch stellt eine letzte Bedingung dar, hinter die zurückzugehen, sinnlos ist. Bereits die Frage, ob ein

21) Hönigswald: Zum Streit um die Grundlagen der Mathematik. S. 39.
22) Kant: a.a.O. S. 150.

Axiomsystem widerspruchsvoll ist, steht unter der Bedingung des Satzes vom Widerspruch. Niemals kann also eine Mathematik das generelle Widerspruchsprinzip in ihre Axiome aufnehmen, denn es ist das Prinzip, unter dem jedes einzelne Axiom steht. Das Hilbert'sche Zeichen Ω für den Widerspruch ist also ein mathematisches Objekt, dem ein eindeutiger Sinn zukommen soll, indem es durch den Satz vom Widerspruch und die reine Anschauung bestimmt ist.. Die Hilbertschen Ausführungen sind Aussagen über das „Wie" der Erfüllung von der Philosophie erhobener Forderungen.

Ein prinzipieller Einwand muß gegen Hilbert und seine Schule im Anschluß an das Vorhergehende noch erhoben werden. Die Bemühungen dieser Forscher laufen darauf hinaus, die Behauptungen auf finite Aussagen zurückzuführen. Man sieht sofort ein, daß mit diesen Bemühungen nichts erreicht ist. Denn das Gültigkeitskriterium für diese finiten Aussagen ist dasselbe wie für infinite. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten hat keine „größere Sicherheit" innerhalb der finiten Aussagen als innerhalb der infiniten. Jenen Aussagen auf Grund der Ausführbarkeit der Operation in endlich vielen Schritten Gültigkeit zuzuschreiben heißt wiederum den Vollzug dem Beweise zu Grunde zu legen. Soll die Angabe der Ausführung der Operation in endlich vielen Schritten nur ein Konstruktionsgesetz bedeuten, so umspannt dieses die Gesetzlichkeit der endlich vielen Schritte, setzt also den definierten Begriff des Endlich voraus. Aber ebenso den definierten Begriff des Unendlich. Der Einwand, der gegen die Entscheidbarkeit infiniter Gesetzlichkeiten geltend gemacht wird, besagt also lediglich, daß finite Operationen bei infiniten Bestimmtheiten nicht zum Ziele führen. Nimmt man dies an, so verfehlt man die Operation, weil man den Begriff der Konstruktion verfehlt hat. Man verfehlt ihn aber in gleichem Maße für finite wie für infinite Gesetzmäßigkeiten. Der finiten Gesetzlichkeit fehlt bei Hilbert ebenso das Entscheidungskritrium wie der infiniten.

Von hier aus entscheidet sich das Problem der Paradoxie. Es darf in der Mathematik keine Paradoxien geben, weil mathematische Setzungen und Axiomsysteme den Satz vom ausgeschlossenen Dritten voraussetzen (obwohl er nicht genügt, um ein Objekt als mathematisch zu kennzeich-

nen). Das Problem der Paradoxien bleibt nach wie vor als zu lösende Aufgabe den Philosophen vorbehalten.

III.

Die Paradoxien der unendlichen Mengen treten in der Mathematik in den verschiedenartigsten Formen auf. Am bekanntesten sind die der Menge aller Mengen, der Menge aller Sätze, der Menge aller Dinge usw. Jedoch schon Hessenberg bemerkt hierzu: „Da die Menge aller Dinge auch mathematisch nicht definierte Objekte enthält, braucht ihre Paradoxie den Mathematiker nicht weiter zu beunruhigen. Leider gibt es aber auch rein mathematisch definierte Mengen, die in sich widerspruchsvoll sind." ..... „Als Typ solcher paradoxer Mengen kann die Menge W aller Ordnungszahlen bezeichnet werden."[23] In der Tat stellt diese Menge einen „Typus" dar; denn wir werden sehen, daß der Fehler, der bei der Bildung dieser Menge begangen wird, auch die Paradoxie der Menge aller Kardinalzeichen, der Menge aller Hauptzahlen, ja sogar die der Menge aller Mengen, Menge aller Dinge verschuldet. Wir betrachten deshalb als konkretes Beispiel die Menge aller Ordnungszahlen und gehen dann erst unter einem allgemeinen Gesichtspunkt auf alle anderen paradoxen Mengen gemeinsam ein.

Die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen ergibt sich in folgender Weise: Die Menge aller Ordnungszahlen definiert eine bestimmte Ordnungszahl μ. Diese muß aber selbst in der Menge aller Ordnungszahlen enthalten sein. Daher muß sie einen Abschnitt definieren, der der Menge selbst ähnlich sein müßte. Eine wohlgeordnete Menge ist aber keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Die Menge aller Ordnungszahlen gehört zu denjenigen Mengen, die sich selbst als Element enthalten. Gegen diese Art von Mengen sind in neueren Arbeiten Einwände gemacht worden, z. B. in der Arbeit von Petzold: „Beseitigung der mengentheoretischen Paradoxa durch einwandsfreie Definition des Mengenbegriffs." Zunächst eine Bemerkung zu dieser Arbeit im Zusammenhang mit unserer Aufgabe. Bereits in ihrem Titel setzt sich die Arbeit die Aufgabe, den Mengenbegriff zu definieren. Dies kann aber, wie eingangs erwähnt, gar nicht

23) Hessenberg: a.a.O. S. 630 ff.

Sache des Philosophen sein. Es ist vielmehr eine Angelegenheit der Mathematiker. Unsere Aufgabe kann es nur sein, die Definition des Mengenbegriffes nach der Richtung zu untersuchen, inwieweit sie den Invarianten der Mathematik genügt.

Petzold erkennt, wie gesagt, das Paradoxon im Begriffe der Menge, die sich selbst enthält. Nach Petzold heißt, eine solche Menge definieren, „die ursprüngliche Definition dieser Menge, die in der Abgrenzung gegen diese ihre Elemente bestand, wieder aufheben." „Element sein ist prinzipiell etwas anderes, als Menge sein."[24] Petzold führt als Kronzeugen Russel an: „No totality can contain member defined in terms of itself."[24*] Mit Recht sind die Ausführungen Petzolds auf heftigsten Widerstand der Mathematiker gestoßen und in einer Rezension dieser Arbeit in den „Fortschritten der Mathematik" erklärt der Rezensent Fl., daß diese Arbeit wohl kaum die Zustimmung der Mathematiker finden würde.

Warum dies nicht der Fall sein dürfte, ist leicht einzusehen. Gibt es doch in der Mathematik tatsächlich Mengen, die sich selbst als Elemente enthalten. Ein Beispiel für solche Mengen ist z. B. die Nullmenge. Auch bestimmt z. B. die Menge aller Funktionswerte einer stetigen Funktion in einem abgeschlossenen Interwall ihre untere Grenze, die selbst wieder ein Funktionswert ist. „Werden diese nichtprädikativen Verfahren ausgeschaltet, so fallen damit die genannten Paradoxien weg, allerdings auch eine große Reihe von Begriffsbildungen, die in der Mathematik üblich und gebräuchlich sind...."[25] Doch schneidet Petzold in seiner Arbeit einen wichtigen Punkt des ganzen Problems an. Er erörtert den Begriff des „Sichenthaltens". Diesen Begriff müssen wir zunächst einer Klärung unterziehen.

Die Forderung, eine Menge solle sich selbst als Element enthalten, besagt, daß eine solche Beziehung hergestellt ist, sodaß Bedingungen bestehen, der Menge und Element in gleicher Weise genügen. Nun erhebt sich sofort die Frage: Wenn es so ist, daß Menge und Element denselben Bedingungen genügen, woher nehme ich das Recht, einmal von Menge, einmal von Element zu sprechen; kraft welcher Bedingung, die diese Bedingung umspannt, kann ich überhaupt sagen, daß sie

24) Petzold, a.a.O. S. 349.
24*) S. 353.
25) Schmeidler: Neuere Grundlagenforschungen in der Mathematik. S. 196.

einer Beziehung genügen? Welcher Art ist diese Beziehung, durch die Menge und Element gegeben sind und gegeben sein müssen? Zunächst scheint es so, als müßten Menge und Element in gleicher Weise definiert sein. Menge und Element sind aber nur und nur in dieser Beziehung „Menge—Element" definiert. Diese Beziehung macht es aber unmöglich zu sagen, Menge und Element seien schlechthin dasselbe, oder es hätte keinen Sinn, von Menge und Element, also von dieser Beziehung zu reden. Diese Beziehung muß notwendig Bedingungen involvieren, denen Menge und Element in gleicher Weise genügen, aber gleichzeitig Bedingungen, die ihr relatives Auseinandertreten in der Beziehung bestimmen. „Menge von Elementen ist diese Menge in korrelativem Gegensatz zu diesen ihren Elementen und sind Elemente dieser Menge diese Elemente nur in korrelativem Gegensatz zu dieser ihrer Menge."[26] Wäre es so, daß dieser korrelative Gegensatz nicht bestünde, wie es bei obenflächlichem Anblick der Mengen, die sich selbst als Element enthalten, zu sein scheint, „wenn also die Menge in einem Sinn Element geworden ist, wie es ihre Elemente sind", so wäre Petzold im Recht, wenn er behauptet: „Dann hat der betreffende Elementbegriff den zugeordneten Mengenbegriff vollständig aufgeschluckt und beseitigt."[26*] Denn es wäre dann das Korrelativverhältnis, also jeder Unterschied zwischen Menge und Element, aufgehoben. Der Sinn der Forderung, die Menge solle sich selbst als Element enthalten, ist also nicht der, daß die „Gegebenheit" der Menge diejenige des Elementes ist. Im Gegenteil, die Gegebenheit muß eine Unterscheidung von Menge und Element fordern, oder sie hörte auf, als „Beziehung" gegeben zu sein. Die Gegebenheit der Menge muß das Kriterium dafür enthalten, wann das Element, wann die Menge gemeint ist.

Es muß notwendig Prinzipien für dieses Auseinandertreten geben. Es ist im Grunde genommen das, was Lipps sagt[27]: „Daß die Klassen M, N, ... sich selbst enthalten, besagt nur, daß unter ihren Elementen je ein Element ist, welches sich zufolge gewisser Eigenschaften (gesperrt vom Verfasser) als identisch mit M, N, ... erweist." Die Ausdrucksweise von Lipps ist insofern nicht ganz einwands-

26) Petzold: a.a.O. S. 348.
26*) S. 351.
27) Lipps, Die Paradoxien der Mengenlehre, Jahrbuch für Philosophie 6, S. 566.

frei, weil das Wort identisch, das hier gebraucht wird, bereits für eine bestimmte mathematische Zuordnungsgesetzlichkeit verbraucht ist. Man könnte den Satz von Lipps vielleicht besser folgendermaßen aussprechen: Unter einem gewissen Gesichtspunkt der Zuordnung (von Lipps Eigenschaft genannt) kann man von gewissen Mengen sagen, sie enthalten sich als Element. Oder: Es gibt Gesichtspunkte der Zuordnung, die das Enthaltensein von Mengen in ihren eigenen Elementen definieren, weil die „Beziehung" definiert sein muß. Dieser Gegensatz muß sich in der Gegebenheit der Menge ausprägen.. Diese Gegebenheit muß darüber entscheiden können, wann von der Menge selbst, wann von ihrem Element die Rede ist, unbeschadet davon, daß es einer gewissen gleichen Zuordnungsgesetzlichkeit genügen soll, wie die Menge selbst.

In ähnlicher Weise argumentiert Petzold, freilich mit der radikalen Absicht, zu zeigen, daß es keine Mengen gäbe, die sich selbst als Element enthalten (denn Menge und Element seien zwei grundsätzlich verschiedene Objekte). Man habe in Mathematikerkreisen dagegen geltend gemacht, „es gäbe keinen Begriff Element, sodaß nur gewisse Dinge unter ihn fielen. Das Urteil:

x ist Element von y

enthält zwei Leerstellen, die ich beliebig ausfüllen kann."[28] Diesen Einwand führt Petzold an, um ihn zu widerlegen. Es ist also zunächst so, daß es keine Objekte gibt, die nur Elemente und andere Objekte, die nur Mengen sein können. Sondern Menge und Element sind Relationstermini, die ihre Bestimmtheit in einem gewissen Ordnungszusammenhange erhalten; das heißt die Leerstellen der Relation sind beliebig auszufüllen (beliebig als wohlbestimmter Terminus verstanden.)

Ich kann z. B. sagen:

x ist Onkel von y.

Ich kann aber auch Onkel von mir selbst sein, das heißt, beide Leerstellen mit demselben Objekt besetzen. Petzold erwidert auf diesen Einwand:[29] „Auch wenn ich die Schwester meiner Mutter geheiratet habe, bin „ich als Neffe gedacht" logisch

28) Petzold: a.a.O. S. 349.
29) Petzold, a.a.O. S. 350.

nicht dasselbe wie „ich als Onkel gedacht“.“ Was heißt nun dieses „logisch anders“? Diese Zuordnung, der ich in der Onkelbeziehung genüge, indem ich mich mir als Onkel zuordne, setzt Bedingungen, die mich in dieser Beziehung mit mir auseinander treten lassen. Schon indem ich nämlich meine Verwandschaftsbeziehung „Neffe“ in anderer Weise ableite wie die als „Onkel“, indem ich um die verschiedenen Bedingungen weiß, vermöge deren ich Neffe und vermöge deren ich Onkel und vermöge deren ich beides zugleich bin, behaupte ich, daß die beiden Objekte, mit denen ich die Leerstellen besetzt habe, etwas Verschiedenes darstellen. Die Beziehung, vermöge deren ich zugleich Neffe und Onkel bin, ist überhaupt nur insofern bestimmt, als „ich als Onkel gedacht“ etwas anderes bin wie „ich als Neffe gedacht“.

Diesem Beispiel kommt keineswegs der Wert einer bloßen Analogie zu, sondern es genügt in seiner Relationsstruktur mathematischen Bedingungen.[30] Doch Petzold schließt aus diesem Beispiel zu viel. Er schließt nämlich daraus, daß es in der Mathematik keine solchen Beziehungen geben dürfe, wie:

die Menge M ist Element von sich selbst.

Petzold verkennt den reinen Ordnungscharakter der Mathematik. Er glaubt, daß die Mathematik, indem sie so definiert, leugnete, daß „M als Menge gedacht“ etwas anderes sei als „M als Element gedacht“. Petzold verkennt, daß es sich hier nicht um Dinge handelt, daß das Beharrende hier nicht „Substanz“ ist, sondern daß die Objekte Glieder einer Relation darstellen. Diese Relation bestimmt erst den Sachverhalt:

M ist Element von M.

Sie bestimmt ihn, indem sie ein Prinzip angibt, unter dem dieser Sachverhalt möglich ist. Sie gibt aber gleichzeitig Prinzipien an, die „M als Menge gedacht“ von „M als Element gedacht“ unterscheiden. Die Relation hat, wie es Lipps nennt, einen bestimmten „Triftigkeitsbereich“,[30*] für den sie gilt.

Es erhebt sich die Frage: Muß es solche andere Bereiche geben? Der Begriff der Menge ist es, der diese Bereiche fordert, weil er die Gesichtspunkte fordert, unter denen die Menge ihre Elemente im „Griff“ hat, um mit einem Ausdruck von Lipps zu reden.[31] Die Menge ist „diese Gesichtspunkte“ selbst,

30) Vergl. auch Russel; Einführung in die mathematische Philosophie.
30*) Lipps, a.a.O. S. 566.
31) Lipps, a.a.O. S. 565.

weil sie ja als solche Beziehung definiert ist, in denen diese Gesichtspunkte als mögliche Zuordnungsprinzipien axiomatisch festgelegt sind. Ein „Bereich" oder, besser gesagt, ein Zuordnungsprinzip fordert das andere, weil die Menge bestimmen heißt, sie durch mögliche Zuordnungsprinzipien definieren. Noch eine andere Betrachtung führt uns zur Beantwortung der oben gestellten Frage. Die Menge enthält sich selbst als Element bedeutet, daß Menge und Element einem bestimmten Zuordnungsprinzip in gleicher Weise genügen sollen. Könnte es nun sein, daß Menge und Element unter jedem möglichen Gesichtspunkt, also in Bezug auf jegliche Ordnungsgesetzlichkeit dieselbe Struktur aufweisen? Eine kurze Bemerkung genügt zur Klärung dieser Frage. Mengen sind keine Dinge, sondern mathematische Objekte. Es ist nicht so, daß an gegebene Mengen eine Ordnungsgesetzlichkeit herantritt, sondern Mengen sind im Sinne dieser Ordnungsgesetzlichkeit gesetzt, sie erfahren durch diese sie definierende Ordnungsstruktur ihre axiomatische Bestimmtheit. Sie sind diese Ordnungsstruktur selbst.

Bedingungen genügen, oder, wie wir oben sagten, der Ordnungsgesetzlichkeit genügen heißt, aus diesenBedingungen erschaffen sein. Es gibt kein anderes Kriterium der Existenz eines mathematischen Gegenstandes als diese Ordnungsgesetzlichkeit, diese axiomatische Bestimmtheit, der er genügt. Zwei mathematische Objekte, die überhaupt denselben mathematischen Bedingungen genügen, gibt es nicht.[32] Es sind dann eben nicht mehr zwei, sondern es ist der eindeutig bestimmte mathematische Gegenstand. (Wohl kann es natürlich zwei beliebige Gegenstände geben, die den gleichen mathematischen Bedingungen genügen. So genügt ein Buch und ein Tisch der gleichen Bedingung, als „ein" Gegenstand zählbar zu sein, unbeschadet ihrer sonstigen Verschiedenheit. Diese Verschiedenheit ist notwendig, denn zwei Gegenstände, die überhaupt in jeder Beziehung gleichen Bedingungen genügen, gibt es überhaupt nicht. Sie können, sofern ich sie sinnvoll als „zwei" bezeichne, überhaupt nur in Bezug auf gewisse Invarianten, wie z. B. oben in Bezug auf diejenigen der Mathematik gleiche Struktur haben.)

Innerhalb der Mathematik müssen also Ordnungsbezüge angebbar sei, die zwei Gegenstände voneinander unterschei-

32) Siehe auch S. 39.

den, um dem „Zweisein" überhaupt einen Sinn zu verleihen. Es läßt sich sinnvoll nicht von zwei Kurven sprechen, die derselben Gleichung genügen, wenn man nicht neue mathematische Gesichtspunkte ins Spiel bringt, die jeder der beiden Kurven ihre „Individualität" verbürgen. Es hieße, die Eindeutigkeit des mathematischen Objekts in Zweifel ziehen, wenn man die Frage stellte, ob zwei Gegenstände in Bezug auf jegliche Ordnungsgesetzlichkeit den gleichen Bedingungen genügen können. Oder es heißt, fremde, außerhalb der Mathematik liegende Bedingungen in Ansatz bringen, um das Zweisein zu rechtfertigen, Bedingungen, die die Reinheit gefährden. Bedingungen ansetzen, denen zwei mathematische Objekte in gleicher Weise genügen, heißt also zugleich, daß die Bedingung dieser Bedingungen, die Setzung, Bedingungen fordert, vermöge deren es zwei Objekte sind, vermöge deren beide Objekte eindeutig definiert sind. „Sich selbst enthalten" sagt also etwas über die Gliederung der Setzung aus. Es heißt nicht, daß das eindeutig bestimmte Objekt, die Setzung, zweimal gesetzt werden kann.

Wenn wir also von der Menge aller Ordnungszahlen sprechen, in deren Analyse wir nunmehr eintreten, so ergibt sich aus dem Gesagten sofort die Notwendigkeit, die Ordnungszahl, die die Menge definiert, von derjenigen zu unterscheiden, die in der Menge als Element auftritt, ohne zunächst ein Prinzip angeben zu können, demzufolge ich wirklich beide unterscheiden kann. Unter dem Gesichtspunkt „Ordnungszahl" sollen sich die beiden nicht unterscheiden, wohl aber muß es nach dem Zuvorgesagten Bedingungen geben, denen zufolge man von z w e i Objekten reden kann. Wir wollen also die Ordnungszahl der Menge aller Ordnungszahlen — ihre Möglichkeit immer vorausgesetzt — mit μ, das Element mit μ^* bezeichnen, wobei darunter zu verstehen ist, daß μ und μ^* unter dem Gesichtspunkt „Ordnungszahl" dieselben sind, jedoch verschieden in Bezug auf irgendwelche andern Prinzipien. Gibt es kein solches Prinzip, so ist gezeigt, daß die Bildung der Menge unmöglich ist. Dieses Prinzip müßte m a t h e m a t i s c h sein. Es handelt sich zunächst also um die Frage, wieso es überhaupt möglich ist, μ und μ^* zu unterscheiden. Welches ist nun das Prinzip, vermöge dessen sich μ und μ^* unterscheidet? Wenn man nach einem mathematischen Prinzip fragt, so ist nach einem Ordnungszusammenhang ge-

fragt, in dem μ, das doch zunächst konstituierendes Prinzip der Menge aller Ordnungszahlen ist, als Objekt auftritt. μ als Definitionsprinzip der Menge aller Ordnungszahlen repräsentiert den Gedanken des Axioms, also die Setzung. Als solches trägt es den Charakter der Letztheit, weil das Axiom mathematischer Begründung nicht mehr bedarf. In dieser seiner Funktion weist es also auf keinen mathematischen Sachverhalt mehr zurück, ist also nicht mehr im Rahmen eines mathematischen Ordnungsgefüges, in einer Relation, bestimmbar. Es unterliegt in seiner Begründung nicht mehr der Ordnung der Mathematik. Oder anders ausgedrückt: Die Setzung ist kein mathematisches Objekt, Axiom als „Gegebenheit" ist es ebenfalls nicht.

Nun soll aber μ selbst mathematisches Objekt sein; das heißt, gemäß des allgemeinen Prinzips der Setzung ein Objekt unter anderen sein. Es gibt solche „Setzungen" in der Mehrzahl nur gemäß des allgemeinen Prinzips der Setzung. Dann sind die Setzungen Objekte eines mathematischen Ordnungszusammenhanges. Die Setzung in ihrer Einmaligkeit, der gegenüber jeder Plural sinnlos ist, kann es nicht sein, sondern sie ermöglicht diesen Ordnungszusammenhang, weil Setzung Gliederung ist. Die Setzung selbst ist durch keine Ordnungsgesetzlichkeit der Mathematik bestimmbar. Die Ordnung, der Definitionen und Axiome unterliegen, ist nicht die Ordnung der Mathematik, sondern der Gedanke der Ordnung, der Mathematik ermöglicht. Nichtsdestoweniger „schafft" die Definition ihr Objekt, indem sie es als Setzung unter Setzungen bestimmt. In dieser Funktion des Schaffens tritt die Definition ihrem Objekt gegenüber. Das Objekt ist aus Beziehungen heraus bestimmt, aus ihnen ableitbar, die Setzung ist das Prinzip dieser Ableitung und als solche unableitbar. Jeder mathematische Gegenstand genügt also dieser doppelten Funktion, als Setzung unableitbar zu sein, „individuelle Bestimmtheit" zu verkörpern,[33] und andererseits, indem er zu andern Objekten in Beziehung tritt, aus diesen Objekten „konstruiert" zu sein.

Spricht man von der Definition der Elipse, so spricht man von der Eindeutigkeit des mathematischen Gegenstandes „Ellipse". Trotzdem gibt es „Ellipsen" gemäß dieses Definiti-

33) Hönigswald: Zum Streit um die Grundlagen der Mathematik. S. 50.

onsprinzips. Unter „Ellipse“ ist nicht eine bestimmte Ellipse des Raumes gemeint, sondern die Mannigfaltigkeit der möglichen Ellipsen, die in der Setzung „der“ Ellipse, wir können, wie wir später noch sehen werden, ebensogut sagen, „aller“ Ellipsen, ihren Ausdruck findet. Es gibt also Setzungen gemäß dem generellen Prinzip der Setzung, die der Vielheit der Setzungen gegenüber einmalig ist. Diese Gegenüberstellung ist nicht diejenige von „viel“ und „eins“. Dieses „ein“ ist das „ein“ der Identität, das heißt der Setzung. Setzung als Sinn der mathematischen Ableitung ist also selbst grundsätzlich nicht mathematisch bestimmbar, weil sie selbst Bestimmtheit verkörpert. Gegenüber diesem „ein“ der Setzung ist jeglicher Plural, der diesem „ein“ in korrelativer Gleichberechtigung zur Seite träte, unmöglich.

Man könnte den Einwand machen, daß es doch aber „mehrere“ Definitionen der Ellipse gäbe. Dieses „mehrere“ bezieht sich aber nicht auf die Eindeutigkeit, die mehrere Male gesetzt werden soll, sondern auf die Mannigfaltigkeit möglicher Beziehungen. Es ist immer dasselbe Objekt „Ellipse“ unter Voraussetzung seiner Eindeutigkeit.

In mathematischen Ordnungszusammenhängen tritt also das Produkt der Setzung auf, nicht die Setzung selbst; nichtsdestoweniger ist die Setzung für ihr Produkt verantwortlich.

Wie ist es demnach möglich, von μ und μ^* zu sprechen? μ ist zunächst definierendes Prinzip der Menge. Es müßte zugleich Produkt der Definition sein, das heißt, es müßte selbst einem Ordnungszusammenhange als Objekt angehören. Es soll nun demjenigen Ordnungszusammenhange angehören, den es selbst definiert. Zunächst hat μ als Prinzip, das die Menge aller Ordnungszahlen definiert, nur die Funktion die dem Axiom, der Setzung, zukommt. Die Definition oder das System von Axiomen, durch das die Menge gegeben ist, ist eine Beziehung zwischen den Elementen der Menge. Diese Beziehung stellt das bestimmte Objekt, die Menge, dar. Doch definiert diese Beziehung keine Beziehung zwischen dem definierten Objekt und den Gliedern der Beziehung, den Elementen. In der Definition ist die Beziehung ihren Gliedern gegenüber mathematisch transzendent. Von der Definition behaupten, sie definiere zugleich eine Beziehung zwischen ihrem Objekt und den Elementen, hieße, die Definition definieren, näm-

lich, sie einer Beziehung eingliedern, die zugleich sie selbst ist. Damit wäre der eigene Sinn der Definition aufgehoben. Die Definition ist letzte und einzige Instanz, die das Objekt schafft. Durch sie eine weitere Beziehung, die zugleich sich selbst als Beziehung enthält, definiert wissen wollen, würde bedeuten, hinter diese Letztheit zurückgehen, und damit von der Definition behaupten, daß sie nicht Letztheit, also nicht mehr Definition ist. Das Objekt ist also selbst „alle diese Beziehungen", die in die Definition eingehen. Es ist schlechterdings unmöglich zu sagen, so kann man das, was Weyl einmal in Bezug auf die Funktion sagt, sinngemäß ausdrücken, was dieses Objekt eigentlich sei, wenn man unter dem „Was" eine Beziehung zwischen der Definition und dem durch sie Definierten versteht, und damit mit dem „Was" hinter die Definition zurückgehen will. Wohl aber ist das Objekt gegeben, wenn die bestimmten Beziehungen bestehen. Wieder ist es die Setzung, die diesen eigentümlichen Sachverhalt ermöglicht. Sie ist ihren Produkten gegenüber definierende, aber selbst keiner Definition mehr benötigende Letztheit. Für den Sachverhalt der ganzen Zahlen ausgedrückt, hieße dies folgendes: ω ist die Gesetzlichkeit der natürlichen Zahlen; es definiert die ganzen Zahlen als wohlgeordnete Menge. Es definiert Beziehungen zwischen 5, 12 1000 usw., es definiert aber keine Beziehung zwischen ω und 5. Man wird einwenden, daß doch aber durch ω ebenfalls eine Beziehung zwischen ω und 5 definiert sei, ω sei ja hinter der Reihe der natürlichen Zahlen angeordnet:

1, 2, 3, ..., 1000, ... ω.

Zunächst wird rein mathematisch schon die Einwendung gemacht werden müssen, daß diese Anordnung nur definiert sei, sofern ich den Begriff der transfiniten Ordnungszahl eingeführt habe, also nur, wenn die natürlichen Zahlen um den Bereich der transfiniten Zahlen erweitert seien. Was bedeutet dieser Einwand aber erkenntnistheoretisch? Mit dem Begriff der transfiniten Ordnungszahl ist ein neues Prinzip in Ansatz gebracht, unter dem ω und z. B. 5 betrachtet werden. Damit sind ω und 5 in eine Beziehung eingetreten, die nicht mehr ω ist. Damit ist ein neuer „Standort"[34] eingenommen, von dem aus ω und 5 betrachtet wird. Aber bedeu-

34) Vgl. Hönigswald: Ist Psychisches zählbar? Grundlagen der Denkpsychologie. S. 122.

tet dies nicht doch ein Zurückgehen hinter die Definition und damit eine Aufhebung ihrer Letztheit, also ihrer Bestimmtheit als Definition? Wir fragen uns, unter welchen Gesichtspunkten dieser Wechsel des Standorts möglich ist. Es gibt zwei Möglichkeiten für diesen Standortswechsel. Wir kennen sie bereits beide. Sie folgten beide aus dem Begriff der Setzung. Der erste folgte aus dem Gedanken der Gliederung. Das mathematische Objekt muß eingegliedert sein in einen Ordnungszusammenhang, in dem es selbst Element ist. Der Standort, unter dem es betrachtet wird, ist die Definition dieses Ordnungszusammenhanges. Mathematisches Objekt sein heißt aber, Term in möglichen Beziehungen sein. Dieser Standortwechsel nimmt der Definition keineswegs den Charakter ihrer Letztheit. Im Gegenteil, von diesem neuen Standort aus das Objekt zu betrachten, ist überhaupt nur möglich, sofern es definiert ist, sofern also die Definition des Objekts als letzte und einzige Instanz es schafft. Von dem neuen Standort aus ist der alte nicht aufgehoben, sondern er ist nur der Ausdruck dafür, daß die Beziehungen, die er beherrscht, nur wieder auf Beziehungen aufgebaut sind, nicht aus unauflösbaren Klumpen. Er ist der Ausdruck für den Relationscharakter der Mathematik. In dieser Weise hinter die Definition zurückgehen heißt nicht die Definition aufheben, sondern sie voraussetzen. Dieses Zurückgehen ist kein Zurücktreten hinter das Medium der Definition, sondern ein konstruktives Verhalten, ein Vorwärtsschreiten von Beziehung zu Beziehung im Medium der Mathematik. Dieser Standortswechsel ist erst das Kriterium dafür, daß die Definition wirklich ein mathematisches Objekt schuf. Es stellt den Sachverhalt der Mathematik dar, der Standortswechsel ist der Gedanke der Gliederung. ω und 5 in eine Beziehung zu setzen, bedeutet keine neue Definition von ω, sondern setzt ω als definiert voraus und verlangt, unter dieser Voraussetzung zu neuen Beziehungen fortzuschreiten.

Auch die zweite Möglichkeit des Standortswechsels ist uns bereits bekannt. Auch sie folgt aus dem Gedanken der Setzung. Es handelt sich um das relative Auseinandertreten von Setzung und ihrem Produkt. In dieser Beziehung (Setzung — Produkt) ist der neue Standort kein neues mathematisches Prinzip, sondern er ist die Gegenständlichkeit selbst. Auf der einen Seite steht die Setzung als Prinzip und

Tatsache, auf der anderen der mathematische Gegenstand, der die Setzung ausprägt, aber die Tatsache der Setzung nicht enthält. Es stehen sich der Sachverhalt der Psychologie und der Mathematik gegenüber, nicht so, daß sie als Unüberbrückbares auseinanderfallen, sondern derart, daß sie vom Standort der Gegenständlichkeit, wir können ebensogut sagen, von dem der Setzung aus betrachtet in deren Eigentümlichkeit, Prinzip und Tatsache zugleich zu sein, in einem wohldefinierten Verhältnis stehen, nämlich in der Beziehung, in der Mathematik und Psychologie zueinander stehen. Dieses Verhältnis ist transzendental, es betrifft die Ableitung der reinen Anschauung aus dem Gedanken der Gegenständlichkeit, also den Sachverhalt des Arioms.

Das relative Auseinandertreten heißt also nicht, daß Definition und mathematisches Objekt innerhalb der Mathematik etwas Verschiedenes sind. Ihre Verschiedenheit offenbart sich erst von der Gegenständlichkeit her als transzendentale Beziehung. Diese transzendentale Beziehung ist wiederum nichts anderes als der Ausdruck dafür, daß die Definition und ihr Objekt vom Standorte der Mathematik dasselbe bedeuten, daß also die Definition das mathematische Objekt ist. Von diesem Standorte her, also im Medium der Mathematik beide unterscheiden wollen heißt, die transzendentale Beziehung verletzen: Man versucht einen Sachverhalt unter mathematischen Gesichtspunkten zu behandeln, der nicht mathematisch ist, man betrachtet die Tatsache der Setzung als mathematisches Objekt. Die transzendentale Beziehung von Definition und definiertem Objekt, also von Setzung und Produkt, kann dazu verleiten, die logisch wohl begründete Aussage: „Die Setzung umspannt ihr Produkt" in eine sogenannte nichtprädikative Aussage umzudeuten, indem man das gegenständliche Prinzip dieses Satzes unerlaubt mathematisch lokalisiert. Wir werden sehen, daß dies bei der Menge aller Ordnungszahlen der Fall ist.

μ und μ^* unterscheiden sich zunächst wie Definition und definiertes Objekt, also wie Setzung und Produkt. Dieser Sachverhalt stellt zunächst kein mathematisches Ordnungsgefüge dar. Soll diese Unterscheidung mathematisch definiert sein, so müssen Bedingungen angegeben werden, vermöge deren μ im Medium der Mathematik anderen Setzungsprodukten gegenüber tritt. Es muß also ein Ordnungsgefüge

aufgezeigt werden, in dem μ als Objekt, als Element, auftritt. Dieses Ordnungsgefüge hat bekanntlich J. König in seiner Typenlehre ersonnen. Er versteht unter „alle Ordnungszahlen" nur immer „alle Ordnungszahlen von gewissem Typus".[35] Damit ist es möglich, μ als Typus der zweiten Typenklasse zu anderen Objekten höherer Typenklassen in Beziehung zu setzen. Damit ist ein mathematisches Prinzip angegeben, demzufolge sich μ und μ* unterscheiden, nämlich vermöge einer Gesetzlichkeit, die sich als Objekt in einer höheren Typenklasse befindet. Jedoch läßt diese „Typeneinteilung" vom Standpunkt der Lösung des Paradoxons völlig unbefriedigt. Man fragt nach dem Recht dieser Klassifikation, und damit darnach, warum es unerlaubt sein solle, daß alle nur denkbaren Ordnungszahlen zu einer Menge zusammengefaßt werden können.

Bei dieser Zusammenfassung aller Ordnungszahlen erhebt sich die Frage nach dem Prinzip, das diese Menge konstituiert. Die Auflösung dieser Frage erfordert, daß wir in eine neue und zu gleicher Zeit allgemeinere Untersuchung eintreten. Sie betrifft eine Analyse des „alle" die den doppelten Sinn dieses Wortes zeigen soll. Es wird sich zeigen, daß eine Menge aller Objekte einer bestimmten Struktur, die wieder ein Objekt genau derselben Struktur definieren sollen, das Paradoxon veranlaßt. Damit ist das Paradoxon in seiner allgemeinsten Form gelöst; denn von diesem Typus sind alle ultrafiniten Mengen, die als paradox erkannt sind. Was bedeutet der Ausdruck „alle Objekte einer bestimmten Struktur", also etwa: alle Zahlen, alle Dreiecke, alle Ellipsen usw.? Er bedeutet zunächst, wir sagten es schon, den Sachverhalt der Setzung. Setzung ist Setzung in ihrer Einmaligkeit, ist letzte Bestimmtheit, sofern sie die Mannigfaltigkeit dieser Objekte der bestimmten Struktur, die sie definiert, umspannt, also „alle" unter sich begreift. Diese Mannigfaltigkeit ist also Gliederung einer Einheit. Sie ist notwendige Funktion des mathematischen Objekts. In jedem einzelnen Objekte prägt sich diese Mannigfaltigkeit, also der Sachverhalt des „alle" aus, denn jedes Objekt enthält die Bedingungen seiner Setzung, vermöge deres es zugleich „alle" ist. Jedes einzelne Dreieck der Ebene enthält die Bedingungen, ver-

35) Vgl. auch Chwistek: Ueber die Hypothesen der Mengenlehre. Math. Annalen 25. S. 440.

möge deren es „das Dreieck" repräsentiert. Das „alle" hat also zunächst hier keinen numerischen Sinn. Es ist keine Vielheit, und die Frage, „wieviel" Objekte es sind, ist diesem Sachverhalt „alle" gegenüber gegenstandslos. Es ist ebenso „eins" wie „alle". Es sind „alle" kraft der Gesetzlichkeit der Einheit, der Gliederung, nicht kraft irgendeines numerischen Prinzips. Es tritt dem 1, 2, 3, ... der Objekte (ebenso natürlich einer stetigen Mannigfaltigkeit) als „schlechthin anders geartete Potenz" entgegen,[36] nämlich als Funktion der Setzung. „Es handelt sich also nicht um eine „Anzahl" .... als vielmehr um den Reichtum der Gliederung", drückt es Hönigswald in derselben Schrift in Bezug auf Denkerlebnisse aus.[37] Das ist der tiefere Sinn in der Unterscheidung, die Paul Finsler macht. „Alle bedeutet zunächst eine Gesamtheit." „Und Gesamtheit bedeutet nicht dasselbe wie Menge."[38] Alle Ordnungszahlen stellen nach Finsler eine Gesamtheit, aber keine Menge dar. Mit dieser Gesamtheit dürfen zunächst mathematische Operationen nicht ausgeführt werden, wenn sich von ihr auch gewisse Aussagen machen lassen. Denn diese Gesamtheit ist „Definition", nicht „Objekt". Sie bedeutet nichts anderes als eindeutige Bestimmtheit d e r Ordnungszahl. Hinter dieses „alle" zurückgehen zu wollen, sofern es nur das „alle" der Gesamtheit ist, hieße hinter die Geltung zurückgehen. Es ist schlechterdings keine mögliche Frage mehr, ob es wirklich alle Objekte dieser Struktur sind, die die Gesamtheit unter sich begreift, weil das „alle" hier Eindeutigkeit bedeutet, hinter die zurückzugehen nicht mehr möglich ist. „Das, was Maupertuis, freilich mit einem unverkennbaren empirischen Akzent in der Struktur der Mathematik als die „Wiederholbarkeit" bezeichnet, das ist, in die Sprache der methodischen Analyse des Problems der Mathematik übertragen, die Forderung der allgemeinen Gültigkeit individueller mathematischer Setzung."[39] Dies ist derselbe Sachverhalt, den das „alle" darstellt. Das „alle" ist somit eine Funktion, die der Setzung, die dem Axiom notwendig zukommt. Es repräsentiert in gleicher Weise Geltung und individuelle Bestimmtheit.

---

36) Hönigswald: Ist Psychisches zählbar? a.a.O. S. 112.
37) Hönigswald: a.a.O. S. 120.
38) Finsler: Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschrift 25. S. 688.
39) Hönigswald: Zum Streit um die Grundlagen der Mathematik. S. 51.

Was bedeutet es nun, dem „alle" einen numerischen Sinn zu geben? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit das „alle" die Bedingungen der Zuordnung und damit die Bedingungen der Menge erfüllt? Derselbe Gedanke der Setzung ist es, der zugleich die numerische Bestimmtheit von Objekten ermöglicht und fordert. (Numerisch ist hier wie im folgenden in einem weiteren Sinne verstanden als der, in dem man es gemeinhin auffaßt. Es handelt sich nicht nur darum, daß Elemente auf die Reihe der natürlichen Zahlen abgebildet werden können, sondern mit numerisch ist hier der allgemeinste Ordnungszusammenhang einer Menge von beliebiger Mächtigkeit und beliebigem Ordnungstypus gemeint.)

Setzung sein heißt, Objekt eines Ordnungszusammenhanges sein. Es bedeutet, daß es sich in diesem Ordnungszusammenhang gegen andere Objekte abgrenzt. Die Eindeutigkeit der Setzung fordert, daß die Objekte der Mannigfaltigkeit selbst wieder eindeutig bestimmt sein müssen, das bedeutet aber, daß sie einmal Setzung in ihrer „individuellen Bestimmtheit" sind, zum anderen „Setzung unter Setzungen", insofern sie dem allgemeinen Prinzip der Setzung genügen müssen. Es muß möglich sein, gemäß einem Prinzip in der Mannigfaltigkeit der Objekte bestimmteObjekte zu kennzeichnen. Die Objekte müssen aufeinander verweisen, sie müssen auseinander konstruierbar sein. Die Mannigfaltigkeit muß zugleich eine Ordnungsbeziehung sein und ihr Prinzip das Gesetz ihrer Konstruktion. Die Eindeutigkeit des Prinzips fordert aber die Möglichkeit seiner Abgrenzung gegen andere Prinzipien. Dieser Abgrenzung muß selbst wieder ein Prinzip zu Grunde liegen. Die Eindeutigkeit des Konstruktionsgesetzes ist gleichzeitig seine Beziehung auf andere. Von „allen" Ellipsen sprechen heißt gleichzeitig: nicht von „allen Hyperbeln" sprechen. Die Ellipsen bilden den Hyperbeln gegenüber eine wohldefinierte Mannigfaltigkeit, (die hier natürlich nicht Vielheit oder Menge bedeutet), unter dem Gesichtspunkt „Kegelschnitt". Im Bereich der Mengen als einer Gesetzlichkeit der Zuordnung bedeutet dies, die Funktion des „alle", die für die betreffende Menge eigentümlich ist, abgrenzen gegen andere „alle". Die Bestimmtheit des Objekts fordert demnach Bestimmtheit des „alle" im Sinne der Zuordnung. Diese Bestimmtheit des „alle" heißt in der Men-

genlehre „Vergleichbarkeit".[39*] Auf Grund der eindeutigen Bestimmtheit des mathematischen Objekts müssen im Gebiet der Mengenlehre die Mannigfaltigkeiten miteinander in eine Beziehung gesetzt werden, wie sie in der sogenannten „trichotomen Disjunktion" verlangt ist. Es darf also grundsätzlich keine Mannigfaltigkeiten geben, die sich jeglicher Vergleichung entziehen, die also nicht in irgendeine Beziehung eingeordnet werden können. Die wohldefinierte Beziehung, in der die Objekte in der Mengenlehre miteinander stehen, ist mit der Forderung der Zuordnung gegeben. Das die Objekte als notwendige Funktion in sich begreifende „alle" muß also in der Mengenlehre einen numerischen Sinn im Sinne von Kardinal- oder Ordinalzahl haben. Von „allen" natürlichen Zahlen sprechen heißt also, in gleicher Weise von der Gesetzlichkeit „der" Zahl wie von dem Objekt ω sprechen, heißt damit, alle natürlichen Zahlen zu einer Menge zusammenfassen und diese Menge gegen andere Mannigfaltigkeiten abgrenzen. Spreche ich von allen natürlichen Zahlen, so ist damit ω^1, ω^2, mitgesetzt. Der ganze Aufbau der Mengenlehre ist in dem Gedanken „alle natürlichen Zahlen" enthalten.

Es wird also gefordert, dieses „alle" zu dem „alle" einer anderen Mannigfaltigkeit in Beziehung gesetzt zu denken. ω selbst ist also zugleich Objekt, das heißt Element einer Menge. Damit bedeutet, von „allen" natürlichen Zahlen sprechen, in gleicher Weise von „der" natürlichen Zahl sprechen, wie sinnvoll leugnen, daß es 6 oder 10 sind, (damit also alle natürlichen Zahlen als M e n g e gesetzt denken).[41]

Wie steht es nun mit der Menge a l l e r Objekte einer bestimmten Struktur, die selbst ein Objekt der Menge definieren? Ist es möglich, daß diesem „alle" ein numerischer Sinn zukommt, den die Mengenlehre notwendig von ihren Objekten fordern muß? Ist dieser Sachverhalt als unmöglich erkannt, so ist es unmöglich, daß alle diese Objekte eine Menge bilden.

„Alle" ist als n u m e r i s c h e s Prinzip der Ausdruck dafür, daß der betreffende Sachverhalt seinem Begriff nach abgeschlossen ist; als Funktion der Setzung ist er unabgeschlossen. Die Definition umspannt eben alle ihre Elemente.

39*) in dem allgemeinsten Sinne: „in Beziehung zueinander setzen können", verstanden; sei es in die der Aequivalenz oder der Aehnlichkeit oder des Ordnungstypus.

41) Vgl. auch Hönigswald: Ist Psychisches zählbar? a.a.O. S. 111.

(Element wieder nicht als letztes unauflösbares Etwas, sondern selbst als Beziehung verstanden.) Die Beziehungen „erschöpfen" sich in dem „alle". Faßt man nun das „alle" als die gleiche numerische Bestimmtheit auf, wie sie durch das „alle" bereits erschöpft sind, so hebt man die Eindeutigkeit des Sachverhalts wieder auf. Man nimmt der Definition ihren Geltungsanspruch. Das „alle" als numerisches Prinzip muß also notwendigerweise einer Beziehung angehören, die selbst nicht unter die Gesetzlichkeit des „alle" fällt. Es muß also ein „Standortswechsel" eintreten. Man könnte einwenden, daß in jeder sich selbst enthaltenden Menge dieser Standortswechsel nicht eintrete; denn sie stelle eine numerische Bestimmtheit dar, wie sie kraft ihrer eigenen Definition in dieser Definition erschöpft sei. Dem ist aber nicht so, wie der geklärte Begriff des „Sichenthaltens" zeigte. Eine Menge A, die sich selbst als Element A enthält, verweist notwendigerweise auf ein Prinzip B, eben diesen neuen Standort, von dem aus der Begriff des Sichenthaltens definiert ist. Das Prinzip B ist also eine neue Beziehung, die durch die Definition A keineswegs erschöpft war. Bei den paradoxen Mengen fehlt aber dieses Prinzip B. Die Erschöpftheit wäre hier eine absolute; denn es gäbe hier keinen Standort, der das Sichenthalten definieren könnte. Diese absolute Erschöpftheit ist aber unmöglich, weil dadurch der Sachverhalt der Gliederung aufgehoben wäre, es gäbe für diese Gliederung kein Prinzip mehr. „Alle" als nicht numerische Bestimmtheit besagt zunächst nur etwas über die Mannigfaltigkeit der Gliederung, man könnte ebensogut Eindeutigkeit sagen. Es stellt keine Bestimmtheit als wohldefinierte Menge dar. So sind denn diesem „alle" gegenüber schon früher in Mathematikerkreisen Bedenken aufgetaucht. Hölder spricht davon, „daß hier dem allgemeinen Begriffe die Klarheit mangelte".[42] Die Elemente der Menge werden nicht „als eine einem klaren Gesetz unterworfene Gesamtheit angesehen". Auf Widersprüche in diesem Begriffsgebiet müßte man also ... überall gefaßt sein."[43] Der Ausspruch Hölders, daß die Begriffe, die zu Antinomien führen, von „ganz unbestimmter Art sind",[44] ist nichts anderes als der Ausdruck dafür, daß die Mannigfaltigkeit, die durch das

42) Hölder, a.a.O. S. 547.
43) Hölder, a.a.O. S. 547.
44) Hölder: a.a.O. S. 552.

„alle" dargestellt wird, keinem Zuordnungsprinzip unterliegt und unterliegen kann. Gibt man trotzdem dem „alle" einen numerischen Sinn, so führt man die Unterscheidung von μ und μ* unerlaubt und künstlich, das heißt, pseudomathematisch, herbei. Man fingiert ein Prinzip, indem man das relative Auseinandertreten als Setzung und Produkt zum Prinzip einer mathematischen Unterscheidung macht. Man erhält also auf Grund dieser Unterscheidung auf einmal zwei Elemente: die Setzung und ihr Produkt. Auf diese Weise entsteht die Paradoxie: Man gibt dem „alle" unberechtigterweise einen numerischen Sinn. Man zählt es als Element, obwohl es nur einen Pseudoelementcharakter hat. Andererseits besinnt man sich darauf, daß μ* als Axiom nicht der Menge zugerechnet werden kann, weil es kein Prinzip gibt, dieses Objekt in der Mannigfaltigkeit mathematisch festzulegen, weil es sich jeglicher Zuordnung innerhalb der Mengenlehre entzieht. So erkennen wir mit Hausdorff, „daß das Wort „alle" nicht immer eine erfüllbare Forderung bezeichnet."[45] Man kann zwar ohne Widerspruch von „allen Ordnungszahlen" sprechen, aber es gibt keine Menge, die sie enthält.[46] Man meint mit „allen Ordnungszahlen" „die" Ordnungszahl in der unabgeschlossenen Mannigfaltigkeit ihrer Beziehungen, aber keine Menge. Alle Ordnungszahlen bedeutet als Abgeschlossenheit „die Ordnungszahl" in ihrer Abgrenzung, z. B. gegen „die Kardinalzahl". Dieses Prinzip der Abgrenzung ist aber nicht numerisch. „Alle Ordnungszahlen" ist zwar ein sinnvolles mathematisches Objekt, aber keine Menge.

Wenn μ* in der Menge aller Ordnungszahlen als Objekt auftritt, so tritt der seltsame Umstand ein, daß es in dieser Menge als Setzung auftritt, daß also die Eindeutigkeit als Objekt gezählt, der transzendentale Bezug zu einem mathematischen gemacht wird. Es tritt also in der Menge aller Ordnungszahlen ein Element auf, das grundsätzlich numerisch nicht als 1 gezählt werden kann, denn es ist unableitbar und das Prinzip jeglicher Zählung. So kam es, „daß dadurch, daß man nicht umhin konnte, allen Ordnungszahlen eine gewisse Eigenschaft zuzusprechen, etwas definiert zu sein schien, was nicht alle Ordnungszahlen ist." So kennzeichnet Lipps tref-

45) Hölder, a.a.O. S. 556.
46) Vgl. auch Finsler: Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. S. 688.
47) Lipps, a.a.O. S. 569.

fend den Sachverhalt des Paradoxons.[47] Die Eindeutigkeit des Objekts wurde also da aufgegeben, wo die Setzung zum Objekt gemacht wurde. Die Definition lieferte nicht immer dieselbe Menge.Deshalb fordert Finsler in seiner Arbeit ausdrücklich, daß nur diejenigen zirkelhaften Mengen zugelassen werden sollen, bei denen „die Definition immer dieselbe Menge liefert".[48] Der logische Sinn dieser Forderung ist also der, grundsätzlich solche Mengen auszuschalten, die vom Typus der von uns behandelten paradoxen sind, in denen alo die Setzung als Objekt auftritt.

Unter die konstruierten Mengen fallen alle, die sich in der Mengenlehre als paradox erwiesen haben, die Mengen aller Kardinalzahlen, aller Hauptzahlen, die Mengen aller Mengen u. a.

Schluß.

Wie steht es nun um diejenigen Mengen, „die den Mathematiker nicht weiter zu beunruhigen brauchen",[49] die Menge aller Dinge, aller Gedanken, aller Sätze. Bekanntlich ergibt sich bei ihnen das Paradoxon auf die gleiche Art wie bei der Menge aller Ordnungszahlen. Sie „erschöpfen" Objekte einer bestimmten Struktur und sollen gleichzeitig ein neues Objekt dieser selben Struktur definieren. Man strukturiert also diese Mengen, als ob sie vom Typus der Menge aller Ordnungszahlen wären. Man betrachtet die Menge aller Gedanken, als ob sie eine Menge wohldefinierter und wohlunterschiedener mathematischer Objekte wäre. Diese Menge ist aber selbst ein Gedanke. Es handelt sich also darum, daß eine Menge aller Objekte X wieder ein Objekt X definieren soll. Daß die X „Gedanken "sein sollen, spielt also beim Zustandekommen des Paradoxons nicht die entscheidende Rolle. Die Menge wird eben derart konstruiert, und dies ist im Medium des Psychischen, wie sich zeigen wird, immer möglich. Wir sagten absichtlich, daß das Paradoxon auf die gleiche Weise konstruiert ist, wie es bei der Menge aller Ordnungszahlen auftrat. Eine ganz andere Frage ist es, ob man es überhaupt von der Menge aller Gedanken auch nur sprechen kann. Eine Menge „aller" Gedanken gibt es nicht,

48) Finsler: Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. S. 702.
49) Hessenberg, a.a.O. S. 630.

weil sie auf das gleiche Paradoxon führen würde, wie die Menge aller Ordnungszahlen. Aber gibt es nicht vielleicht trotzdem Mengen von Gedanken, von Sätzen usw.? Man spricht von der „Stetigkeit" der Gedanken. Man spricht mit Ausdrücken der Mengenlehre von ihrer „Dichte". Es könnte die Annahme nahe liegen, daß diese Dichte derart wäre, wie sie eine der Mengen der Mengenlehre aufweist, und wie sie dort in unabsehbarer Mannigfaltigkeit zur Verfügung stehen, um auf diese komplizierten Strukturen Gedanken abbilden zu können, Gedanken auf irgendeine Weise an ihnen zu „zählen". (Zählen hier in dem allgemeinsten ordnungstheoretischen Sinne als zuordnen verstanden.) Wenn also Psychisches nicht auf die Reihe der ganzen Zahlen abgebildet werden kann,[50] so doch vielleicht auf jene komplizierten Ordnungsgefüge, wie sie in der Mengenlehre vorliegen. Eine genauere Analyse der Frage würde den Rahmen der Arbeit, die sich nur die Paradoxien der Mengenlehre zur Aufgabe setzte, weit übersteigen und zu ihrer Klärung nichts mehr beitragen. Denn wenn es sich auch erwiesen hätte, daß es Mengen von Gedanken überhaupt nicht gäbe, sodaß eine Menge a l l e r Gedanken ihrem Begriff nach nicht bildbar sei, so wären doch die rein mathematischen Paradoxien, also z. B. die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen, damit nicht aufgelöst. Vielmehr zeigte sich bei uns das Umgekehrte, daß nämlich die Auflösung der Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen das Paradoxon der Menge aller Gedanken mitlöste. Die P a r a d o x a war nämlich auf gleiche Weise konstruiert.

Einige Hinweise auf den Unterschied der mathematischen Mengen von Gedankenmannigfaltigkeiten mögen genügen. Die mathematischen Mengen sind Ausprägungen der Setzung. Als solche sind sie in ihrer Ganzheit abgeschlossen, die Setzung „erschöpft" ihre Beziehungen. Sie verhält sich ihren Beziehungen gegenüber „klassifizierend".[51] Darum ist es ebenso falsch wie irreführend, wenn Brouwer von „werdenden Mengen" spricht und sie als prinzipiell nicht abgeschlossene Gesamtheiten betrachtet. Dieses Nichtabgeschlossensein ist in der Mathematik gleichbedeutend mit Nichtdefiniertsein.

Von alledem ist im Psychischen nicht die Rede. Gedanken prägen ebensosehr die Setzung wie die Tatsache der

50) Hönigswald: Ist Psychisches zählbar? a.a.O. S. 88.
51) Hönigswald: Ist Psychisches zählbar. S. 122.

Setzung aus, und nur indem sie diese Tatsache ausprägen, können sie Gedanken genannt werden. Gedanken sind prinzipiell nicht abgeschlossene Gesamtheiten, sie genügen ja der Gesetzlichkeit der Reihe: Ich weiß; ich weiß, daß ich weiß... Das Verhältnis von Gedankenkomplexen zu Gedanken ist ein anderes wie das Verhältnis von Menge zu Element. Es ist nicht klassifizierend, sondern „intentional".[52] Ein Gedankenkomplex ist in gleichem Sinne, also von demselben Standort aus, eines und mehreres, während bei einer Menge gerade ein Standorts w e c h s e l notwendig war, um sie einmal als „ein Objekt", das andere Mal als „Gesetzlichkeit von Objekten" zu betrachten. Es mußten notwendig verschiedene Gesichtspunkte sein, damit die Menge als Element und als Menge von Elementen aufgefaßt werden konnte. Bei den Mengen durfte die Setzung als Tatsache nicht als Element gesetzt werden, bei einem Gedankenkomplex ist apriori die Tatsache der Setzung einbegriffen. Gedanke ist also kein fixiertes Element, für das man irgendein Gesetz seiner Fixierung angeben könnte, sondern er ist Prinzip jeglicher Fixierung und zugleich Tatsache der Fixierung. Gedanken haben keinen Stellenwert in einer gesetzmäßig geordneten Mannigfaltigkeit, sondern Gedanke ist ein eigentümlicher „Verknotungspunkt".[53] Der Verknotungspunkt ist nicht bestimmbar, wenn in gesetzmäßiger Weise eine Reihe „entlang" gegangen wird, um zur der betreffenden „Stelle" des Elements zu gelangen. In der Mathematik ist solches möglich. Das Konstruktionsgesetz ist „eindimensional". (Das hat natürlich nichts mit mathematischen Dimensionen zu tun, sondern es heißt, daß in der Mathematik eine wohlbestimmte Ordnungsgesetzlichkeit herrscht, es stellt dies lediglich ein logisches Bild dar.) Die Mannigfaltigkeit der transfiniten Zahlen „baut sich auf", jedes Element ist durch eine eindeutige Konstruktion prinzipiell erfaßbar. Die betreffende Stelle in der Reihe ist damit endgültig besetzt und für kein anderes Element mehr frei. Es gibt nicht „zwei" Elemente, die auf derselben Stelle liegen. Wollte man dieses Bild für Gedanken beibehalten, so würde jede Stelle eine Mannigfaltigkeit bedeuten. Die Reihe vom Wissen ist an jeder Stelle wirksam. Sie sprengt die Reihe mathematisch begrenzter Zuordnungsmöglichkeiten. Die „ein-

52) Hönigswald: Ist Psychisches zählbar? S. 122.
53) Hönigswald: Ueber das sogenannte Verlieren des Fadens. S. 11.

dimensionale“ Reihe, an der man „entlang“ schreiten kann, reicht nicht aus, um das intentionale Verhältnis der Gedankenmannigfaltigkeit zu umspannen. Dadurch, daß der Gedanke ein Verknotungspunkt ist, der zwar im Medium des Erlebens und nur da definierbar ist, ist er mathematisch nicht bestimmbar. Der Begriff der mathematischen Eindeutigkeit auf ihn angewandt, verlöre jeden Sinn. Gedanke ist kein Punkt im mathematischen Sinne, sondern im präsentiellen, also Verknotungspunkt. Der Versuch, ihn mathematisch zu fixieren, würde sofort auf Paradoxien führen. Der „Gedanke“ ist nämlich jede beliebige Zahl von Elementen, er ist eine grundsätzliche „Unerschöpfbarkeit“ von Elementen. Man könnte immer noch eins hinzufügen. Es handelt sich eben um eine grundsätzlich nicht mathematisch zu bewältigende Bestimmtheit, um die Reihe vom Wissen, in der jedes Wissen sich mit dem Wissen darum usw. überdecken, dieselbe Stelle einnehmen würde. Die Mengenbildung von Gedanken muß also notwendigerweise auf Paradoxien führen, da gerade das, was mathematische Paradoxien veranlaßt, zur Eigentümlichkeit der Gedankenmannigfaltigkeit gehört: Der Verknotungspunkt ist nicht als Stelle bestimmbar, sondern ist im mathematischen Sinne schlechthin unbestimmt, er ist in der Dimension des Mathematischen nicht greifbar. Das Psychische entzieht sich also mathematischer Eindeutigkeit. Wo sich Psychisches in die Mathematik einschleicht, muß der Sachverhalt aufhören, eindeutig zu werden, er m u ß also auf Paradoxien führen. Es ist immer da möglich, Paradoxien zu konstruieren, wo Psychisches in die Mathematik eingeführt wird.

Literaturverzeichnis.

Ackermann: Begründung des Tertium non datur mittels der Hilbert'schen Theorie der Widerspruchsfreiheit. (Math. Annalen 93.)
Becker: Mathematische Existenz. (Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung. VIII.)
Bergmann: Das Unendliche und die Zahl. (Halle 1913.)
Bernays: Ueber Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. (Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung. Bd. 31. S. 10—19.)
Chwistek: Ueber die Hypothesen der Mengenlehre. (Math. Zeitschrift 25.)
Finsler: Gibt es Widersprüche in der Mathematik? (Jahresberichte der deutschen Mathemikervereinigung. Bd. 34. S. 153.)
— Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. (Math. Zeitschrift 25.)
— Formale Beweise und Entscheidbarkeit. (Math. Zeitschrift 25.)
Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. (Berlin 1923.)
Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre. (Göttingen 1906.)
Hilbert: Ueber das Unendliche. (Math. Annalen 95.)
— Die logischen Grundlagen der Mathematik. (Math. Annalen 88.)
Hölder: Die mathematische Methode. (Berlin 1924.)
Hönigswald: Grundlagen der Denkpsychologie. (Berlin 1925.)
— Zum Streit um die Grundlagen der Mathematik. (Heidelberg 1912.)
— Vom Problem des Rhythmus.. (Berlin 1926.)
König, J.: Ueber die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. (Math. Annalen 61.)
Lipps: Die Paradoxien der Mengenlehre. (Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung VI.)
Moog: Einheit und Zahl. (Kantstudien 23.)

Neumann: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. (Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik. Band 154.)
Petzold: Beseitigung der mengentheoretischen Paradoxa durch logisch einwandfreie Definitionen des Mengenbegriffs. (Kantstudien 30.)
Russell: Einführung in die mathematische Philosophie. (München 1923.)
Schmeidler: Neuere Grundlagenforschungen in der Mathematik. (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 1929, Nr. 7.)
Weyl: Das Kontinuum. (Leipzig 1918.)
— Philosophie der Mathematik. (München 1926.)
— Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. (Math. Zeitschrift 20.)
Zermelo: Grundlagen der Mengenlehre. (Math. Annalen 65.)

Lebenslauf.

Am 8. November 1903 wurde ich, Edgar Hunger, evangelischer Konfession, als Sohn des Kaufmanns Richard Hunger und seiner Ehefrau Marta, geb. Thiel, zu Breslau geboren. Nach vierjährigem Besuch einer Volksschule besuchte ich die Bender-Oberrealschule zu Breslau, die ich Ostern 1923 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich studierte an der Universität Breslau Mathematik, Physik, Astronomie, Philosophie und bestand am 25. Februar 1928 das Staatsexamen. Seit dem 1. April 1928 bin ich im Vorbereitungsdienst für das Lehramt an höheren Schulen tätig.

Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

v. Frisch, Hahn, Hoheisel, Hönigswald, Jüttner, Kneser, Koschmieder, Kühnemann, Lummer †, Matthes, Miller †, Mitscherlich, Rademacher, Reiche, Schur, Wacholder, Waetzmann, Wilkens.

Allen meinen verehrten Lehrern bin ich zu tiefem Dank verpflichtet, ganz besonders aber Herrn Prof. Dr. Hönigswald, der diese Arbeit angeregt und mir stets in liebenswürdigster Weise mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.